UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MSG343 - Geometri Berkomputer

Masa: [3 jam]

Jawab **semua** soalan.

1. (a) Bincangkan mengenai lengkung dan permukaan yang diwakilkan secara berparameter. Bagaimana anda memplotnya?

(20/100)

(b) Matriks berortogon merupakan matriks segiempat sama A yang menepati $AA^T = I$. Tunjukkan

(i) $A^T = A^{-1}$

(ii) $|A|\,|A^T| = 1$

(10/100)

(c) Tunjukkan bahawa titik (0,1) dan (1,0) merupakan titik persilangan di antara bulatan berjejari 1 dan berpusat asalan dengan garis lurus $\underline{r}(t) = (t, 1-t)$.

(15/100)

(d) Tunjukkan bahawa tiga satah $\underline{r}\cdot\underline{n}_1 = p_1$, $\underline{r}\cdot\underline{n}_2 = p_2$ dan $\underline{r}\cdot\underline{n}_3 = p_3$ bersilang pada titik

$$\underline{r} = \frac{p_1(\underline{n}_2 \times \underline{n}_3) + p_2(\underline{n}_3 \times \underline{n}_1) + p_3(\underline{n}_1 \times \underline{n}_2)}{\underline{n}_1 \cdot (\underline{n}_2 \times \underline{n}_3)}$$

jika $\underline{n}_1 \cdot (\underline{n}_2 \times \underline{n}_3) \neq 0$. Vektor $\underline{n}_1, \underline{n}_2, \underline{n}_3$ merupakan vektor unit normal bagi satah-satah tersebut dan p_1, p_2, p_3 adalah jarak tegak lurus satah dari asalan.

(25/100)

(e) Tuliskan matriks transformasi berbentuk homogen bagi transformasi tiga dimensi berikut:

.../2-

Translasi sebanyak 0.5 bagi x, 0 bagi y dan -0.2 bagi z, dan putarkan sebanyak $\frac{\pi}{3}$ mengelilingi paksi z.

(30/100)

2. (a) Katakan lengkung $\underline{r}(t)$ ditakrifkan sebagai

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} \underline{p}(t) = (p_1(t), p_2(t)), & a - \alpha \le t \le a \\ \underline{q}(t) = (q_1(t), q_2(t)), & a \le t \le a + \beta \end{cases}$$

$$\alpha, \beta > 0$$

(i) Berikan syarat supaya lengkung $\underline{r}(t)$ mempunyai keselanjaran G^1 pada titik $t = a$.

(ii) Jika $\underline{p}(t)$ dan $\underline{q}(t)$ merupakan dua lengkung kubik Bezier, gunakan poligon kawalan yang sepadan untuk menjelaskan interpretasi geometri bagi keselanjaran G^2 pada titik $t = a$.

(35/100)

(b) Katakan persamaan secebis lengkung B-Spline kubik seragam terbuka berbentuk

$$S_i(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \\ V_{i+3} \end{bmatrix}$$

$$0 \le i \le n-3$$

di mana V_i, $i = 0, .., n$ merupakan titik kawalan.

(i) Buktikan $S_i(t)$ dan $S_{i+1}(t)$ mempunyai kesselanjaran C^2 pada titik $S_i(1) = S_{i+1}(0)$.

(ii) Berikan syarat bagi titik kawalan khayalan V_{-1} dan V_{n+1} supaya lengkung tersebut menginterpolasi titik kawalan hujung, yakni $S_{-1}(0) = V_0$ dan $S_{n-2}(1) = V_n$.

(iii) Tuliskan bentuk persamaan secebis lengkung B-Spline kubik seragam tertutup.

(40/100)

...3/-

(c) Bincangkan mengenai pembinaan permukaan dari data pada empat bucu segiempat dengan menggunakan kaedah Coons.

(25/100)

3. (a) Lengkung Bezier berdarjah n ditakrifkan oleh

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} V_i \; B_i^n(t) \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

dengan $B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-i)!i!} t^i(1-t)^{n-i}$ dan V_i merupakan titik-titik kawalan.

(i) Tunjukkan bahawa

$$B_i^n(t) = \frac{(n+1-i)}{(n+1)} B_i^{n+1}(t) + \frac{(i+1)}{(n+1)} B_{i+1}^{n+1}(t)$$

dan

$$B_i^m(u)\, B_j^n(u) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{j}}{\binom{m+n}{i+j}} B_{i+j}^{m+n}(u)$$

dengan $\binom{m}{i} = \frac{m!}{(m-i)!i!}$,

(ii) Buktikan secara aruhan bahawa

$$\frac{d^rP(t)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r V_i \; B_i^{n-r}(t)$$

dengan $\Delta^r V_i$ sebagai beza kedepan V_i peringkat r.

(45/100)

.../4-

(b) Permukaan Bezier berdarjah (m,n) ditakrifkan sebagai

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} V_{ij} \, B_i^m(u) \, B_j^n(v) \quad , \quad 0 \le u, v \le 1$$

dengan V_{ij} sebagai titik kawalan.

(i) Tunjukkan bahawa P(u,v) menepati syarat hul cembung.

(ii) Terangkan (dengan lakaran yang sesuai) bagaimana algoritma de Casteljau dapat digunakan untuk mendapatkan titik permukaan. Gunakan permukaan bikuadratik sebagai kes contoh.

(30/100)

(c) Secebis lengkung kubik Bezier, Ball dan B-Splines dengan titik kawalannya yang sepadan boleh ditulis sebagai:

Bezier : $(1-t)^3 V_0 + 3t(1-t)^2 V_1 + 3t^2(1-t) V_2 + t^3 V_3$

Ball : $(1-t)^2 W_0 + 2t(1-t)^2 W_1 + 2t^2(1-t) W_2 + t^2 W_3$

B-Spline: $\frac{1}{6}(1-t)^3 D_0 + \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4) D_1$

$$+ \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1) D_2 + \frac{1}{6} t^3 D_3.$$

Tuliskan lengkung Ball dan B-Splines di dalam bentuk Bezier. Lakarkan pertalian titik kawalan ketiga kaedah ini.

(25/100)

- oooOOooo -