

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MSS 211 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa ket-tas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA EMPAT** soalan.

...2/-

1. (a) Katakan hubungan W ditakrifkan ke atas set $A = \mathbb{R} - \{0\}$ dengan

$$W = \{(x, y) \mid xy > 0\}.$$

Tentukan sama ada W

- (i) refleksif
- (ii) simetri
- (iii) transitif

(30/100)

- (b) Katakan $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ dan operasi $*$ ditakrifkan ke atas H dengan

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d).$$

Tunjukkan bahawa

- (i) $*$ adalah suatu operasi dedua atas H .
- (ii) $*$ adalah kalis sekutuan.

Cari unsur identiti bagi $*$ dan songsangan bagi $(a, b) \in H$.

Cari (x, y) yang memenuhi $(1, 2) * (x, y) = (3, 4)$.

(40/100)

- (c) Bagi setiap kongruen yang berikut, tentukan yang mana mempunyai penyelesaian integer. Cari semua penyelesaian integer yang wujud itu

- (i) $4x \equiv 7 \pmod{6}$
- (ii) $4x \equiv 20 \pmod{6}$

(30/100)

2. (a) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a, b \in G$. Jika $a * b = b * a$, buktikan bahawa

$$a * b^n = b^n * a \text{ bagi semua integer } n.$$

(20/100)

...3/-

- (b) Katakan $A_4 =$ kumpulan selangseli darjah 4 dan

$$H = \{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1), (1\ 2\ 4), (4\ 2\ 1)\}$$

Tentukan sama ada H suatu subkumpulan bagi A_4 .

Jika $K = \{e, (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}$, cari semua koset kanan bagi K dalam A_4 . Tentukan sama ada K suatu subkumpulan normal bagi A_4 .

(50/100)

- (c) Katakan α ialah suatu pilihatur yang bukan identiti e . Jika wujud integer positif n supaya $\alpha^{2n+1} = e$, buktikan α adalah suatu pilihatur genap.

(30/100)

3. (a) Katakan dua fungsi f dan g ditakrifkan ke atas S_4 seperti berikut:

$$(\alpha)f = (1\ 2)\alpha$$

$$(\alpha)g = (1\ 2)\alpha(1\ 2).$$

Tentukan sama ada f atau g merupakan homomorfisma.

(30/100)

- (b) Katakan $G = \langle a \rangle$ ialah suatu kumpulan kitaran yang tak terhingga. Cari satu isomorfisma dari $\langle G, * \rangle$ ke $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

(30/100)

- (c) Katakan G_1 dan G_2 dua kumpulan dan e_2 ialah identiti bagi G_2 . Katakan $f : G_1 \rightarrow G_2$ ialah suatu homomorfisma dan

$$H = \{x \in G_1 \mid (x)f = e_2\}$$

Buktikan bahawa H adalah subkumpulan normal bagi G_1 .

(40/100)

4. (a) Takrifkan sebutan-sebutan berikut:

- (i) gelanggang
- (ii) medan
- (iii) domain integer

(15/100)

(b) Katakan

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

dan $+$, \cdot ialah penambahan dan pendaraban matriks.

Tunjukkan $\langle M, +, \cdot \rangle$ adalah suatu gelanggang tetapi bukan domain integer.

(35/100)

(c) Katakan $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Buktikan bahawa H adalah suatu subgelanggang bagi $\langle R, +, \cdot \rangle$.

(20/100)

(d) Buktikan bahawa persilangan dua subgelanggang B_1, B_2 bagi suatu gelanggang A adalah suatu subgelanggang bagi A .

(30/100)