UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

MKT545 - Spline Untuk Penggunaan Grafik Komputer

Tarikh: 6 April 1987 Masa: 2.15 ptg - 5.15 ptg
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Katakan $P(t) = (X(t), Y(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, adalah suatu lengkungan. Berikan takrif vektor tangen unit $T(t)$ dan vektor kelengkungan (curvature vector) $K(t)$ bagi $P(t)$.

   Tunjukkan bahawa

$$K(t) = \frac{P'(t) \times P''(t) \times P'(t)}{|P'(t)|^4}$$

   Apakah maksud $P(t)$ mempunyai keselanjaran geometri darjah dua atau keselanjaran G^2 pada $t = t_0$?

   Dapatkan syarat-syarat untuk $X(t)$ dan $Y(t)$ supaya $P(t)$ adalah selanjar G^2 pada $t = t_0$.

   (100/100)

2. Katakan $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$. Terangkan bagaimana kita dapat membentuk fungsi $B_i(t)$ supaya mempunyai sifat-sifat berikut:

   (i) $B_i(t) = 0 \quad \forall\, t \notin (t_i, t_{i+4})$,

   (ii) $B_i(t)$ merupakan polinomial kubik pada setiap selang (t_j, t_{j+1}),

   (iii) Lengkungan $P(t) = (X(t), Y(t))$, $t_1 < t < t_m$ di mana $X(t) = \sum_{i=1}^{m-4} x_i B_i(t)$, $Y(t) = \sum_{i=1}^{m-4} y_i B_i(t)$, mempunyai keselanjaran C^1 dan keselanjaran kelengkungan.

   (iv) Lengkungan $P(t)$ mempunyai sifat hul cebung.

   Nyatakan dengan memberi penerangan, sifat-sifat lengkungan $P(t) = (X(t), Y(t))$ tersebut yang penting untuk mereka-bentuk lengkungan.

   (100/100)

3. Katakan m, n adalah integer-integer positif, $m \geqslant n$ dan $(t_i)_{i=1}^{m+n}$ adalah suatu jujukan tak menyusut yang memenuhi syarat $t_i < t_{i+n}$ $\forall\ i = 1,2,\ldots,m$. Untuk $i = 1,2,\ldots,m$ kita tandakan B-spline ternormal sebagai

$$N_{i,n}(t) = N(t \mid t_i,\ldots,t_{i+n}).$$

Diberi titik-titik kawalan $P_i \in \mathbb{R}^k$ ($k = 2$ atau 3), $i = 1,2,\ldots,m$, biarkan

$$\gamma_n(t) = \sum_{i=1}^{m} P_i N_{i,n}(t).$$

Kita takrifkan

$$P_i^{[0]}(t) = P_i, \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

dan untuk $r = 1,2,\ldots,n-1$,

$$P_i^{[r]}(t) = \left(\frac{t_{i+n}-t}{t_{i+n}-t_{i+r}}\right)P_i^{[r-1]}(t) + \left(\frac{t-t_{i+r}}{t_{i+n}-t_{i+r}}\right)P_{i+1}^{[r-1]}(t),$$

$i = 0,1,\ldots,m-r$. Tunjukkan bahawa untuk $t_j < t < t_{j+1}$

$$P_{j-n+1}^{[n-1]}(t) = \gamma_n(t).$$

Jika $t_i = i-1$, dan $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (0,1)$, $V_3 = (1,2)$, $V_4 = (2,2)$, $V_5 = (3,1)$, kirakan $\gamma_3(4.5)$.

(100/100)

4. (a) B-spline multivariat $M(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{x}^0,\ldots,\underset{\sim}{x}^n)$, dimana $\underset{\sim}{x}^i \in \mathbb{R}^k$, $k < n$, memenuhi hubungan rekursi

$$M(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{x}^0,\ldots,\underset{\sim}{x}^n) = \frac{n}{n-k}\sum_{j=0}^{n}\lambda_j\, M(\underset{\sim}{x}|\underset{\sim}{x}^0,\ldots,\underset{\sim}{x}^{j-1},\underset{\sim}{x}^{j+1},\ldots,\underset{\sim}{x}^n)$$

pada titik $\underset{\sim}{x} = \sum_{j=0}^{n}\lambda_j \underset{\sim}{x}^j$ dengan $\sum_{j=0}^{n}\lambda_j = 1$, jika B-spline-B-spline berkenaan adalah selanjar pada $\underset{\sim}{x}$. Dengan menggunakan hubungan rekursi tersebut, kirakan $M((1,1)|\underset{\sim}{x}^0,\ldots,\underset{\sim}{x}^4)$ di mana $\underset{\sim}{x}^0 = \underset{\sim}{x}^1 = (0,0)$, $\underset{\sim}{x}^2 = (2,0)$, $\underset{\sim}{x}^3 = (1,2)$, $\underset{\sim}{x}^4 = (0,2)$.

(b) Polinomial-polinomial Bernstein darjah n pada segitiga $T_1\ T_2\ T_3$ yang ditandakan dengan $B^n_{\underset{\sim}{i}}$, $\underset{\sim}{i} = (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ $|\underset{\sim}{i}| = n$, adalah polinomial-polinomial berbentuk

$$B^n_i(x) = \frac{n!}{i_1!\,i_2!\,i_3!}\, x_1^{i_1}\, x_2^{i_2}\, x_3^{i_3}$$

di mana $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, x_3)$ adalah koordinat-koordinat baripusat (barycentric coordinates) terhadap segitiga $T_1\ T_2\ T_3$.

Tunjukkan bahawa

$$B^n_{\underset{\sim}{i}}(\underset{\sim}{x}) = x_1\, B^{n-1}_{\underset{\sim}{i}-\underset{\sim}{e}^1}(\underset{\sim}{x}) + x_2\, B^{n-1}_{\underset{\sim}{i}-\underset{\sim}{e}^2}(\underset{\sim}{x}) + x_3\, B^{n-1}_{\underset{\sim}{i}-\underset{\sim}{e}^3}(\underset{\sim}{x}),$$

di mana $\underset{\sim}{e}^1 = (1,0,0)$, $\underset{\sim}{e}^2 = (0,1,0)$, $\underset{\sim}{e}^3 = (0,0,1)$.

Katakan $V_i \in \mathbb{R}^3$ dan

$$P_n(\underset{\sim}{x}) = \sum_{|\underset{\sim}{i}|=n} V_{\underset{\sim}{i}}\, B^n_i(\underset{\sim}{x}) .$$

Jika

$$V^{[0]}_{\underset{\sim}{i}}(\underset{\sim}{x}) = V_{\underset{\sim}{i}}\ , \qquad |\underset{\sim}{i}| = n$$

dan untuk r = 1,2,...,n

$$V^{[r]}_{\underset{\sim}{i}}(\underset{\sim}{x}) = x_1\, V^{[r-1]}_{\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{e}^1}(\underset{\sim}{x}) + x_2\, V^{[r-1]}_{\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{e}^2}(\underset{\sim}{x}) + x_3\, V^{[r-1]}_{\underset{\sim}{i}+\underset{\sim}{e}^3}(\underset{\sim}{x}),$$

$|\underset{\sim}{i}| = n-r$, tunjukkan bahawa

$$V^{[n]}_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{x}) = P_n(\underset{\sim}{x}) .$$

(100/100)

5. Katakan $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ dengan $x_0 < x_n$, dan $M(x|x_0,\ldots,x_n)$ adalah B-spline yang berasas kepada knot-knot $x_0,\ldots,x_n$. Tunjukkan bahawa untuk $f \in L_1^n(\mathbb{R})$

$$[x_0,\ldots,x_n]f = \frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} M(x|x_0,\ldots,x_n)f^{(n)}(x)dx,$$

di mana $[x_0,\ldots,x_n]$ menandakan beza terbahagi.

Jika kita tandakan $M_n(x) = M(x|0,1,\ldots,n)$, tunjukkan bahawa transformasian Fourier bagi M_n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} M_n(x)e^{-iux}dx = \left(\frac{1 - e^{-iu}}{iu}\right)^n .$$

(100/100)

- oooOooo -