

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MAT 363 – Pentaabiran Statistik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat dan **SATU** lampiran yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA EMPAT** soalan.

...2/-

1. (a) Biarkan X_1, X_2, \dots, X_n menandai sampel rawak daripada taburan $N(\mu, \sigma^2)$. Cari taburan setiap pemboleh ubah rawak berikut:

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)}{\sigma^2} \qquad (ii) \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \qquad (iv) \quad \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

(30/100)

- (b) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n sampel rawak saiz n daripada taburan $X^2(r)$ dan biarkan \bar{X}_n menandai min sampel.

- (i) Cari taburan \bar{X}_n dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen.
(ii) Cari taburan penghad \bar{X}_n dengan mencari had fungsi penjana momen \bar{X}_n apabila $n \rightarrow \infty$.

(40/100)

- (c) Katakan X_1, X_2, \dots, X_n suatu sampel rawak daripada taburan eksponen yang berparameter θ . Jika $Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, cari taburan penghad pemboleh ubah rawak nY_1 .

(30/100)

2. (a) Berasaskan sampel rawak saiz n daripada taburan $N(\theta_1, \theta_2)$ cari

- (i) penganggar kaedah momen
(ii) penganggar kebolehdajian maksimum bagi parameter θ_1 dan θ_2 .

(30/100)

- (b) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n sampel rawak daripada taburan $P_0(\lambda)$ dan biarkan \bar{X} dan S^2 masing-masingnya menandai min sampel dan varians sampel.

- (i) Tunjukkan bahawa

$$T = a\bar{X} + (1-a)S^2, \quad 0 < a < 1,$$

ialah penganggar saksama λ dan cari nilai a yang meminimumkan varians T . Biarkan $\sigma_{\bar{X}}$ dan σ_{S^2} masing-masingnya menandai sisihan piawai \bar{X} dan S^2 .

- (ii) Tentusahkan bahawa \bar{X} ialah penganggar cekap λ .

(35/100)

...3/-

- (c) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n sampel rawak daripada taburan $N(\theta, 1)$, $-\infty < \theta < \infty$. Cari PSVMS bagi θ dan θ^2 dengan menggunakan teorem Lehman-Scheffé.

(35/100)

3. (a) Pertimbangkan sampel rawak daripada taburan $N(\theta, \theta)$. Terbitkan selang keyakinan 95% bagi θ berasaskan sampel rawak saiz $n = 25$ dengan menggunakan kuantiti pangsaan

$$(i) \quad \frac{\bar{X} - \theta}{S/\sqrt{n}} \qquad (ii) \quad \sum_{i=1}^{25} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\theta}$$

(40/100)

- (b) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n sampel rawak daripada taburan $P_0(\lambda)$.

- (i) Menurut teorem had memusat

$$U_n = \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \xrightarrow{D} Z,$$

Z ialah pemboleh ubah rawak normal piawai. Tunjukkan bagaimana selang keyakinan hampiran 100% peratus bagi λ dapat diperolehi.

- (ii) Dengan menggunakan keputusan-keputusan tentang penumpuan dalam kebarangkalian dan penumpuan dalam taburan, tunjukkan bahawa $V_n = \sqrt{\bar{X}_n/\lambda} \xrightarrow{P} 1$ dan seterusnya

$$W_n = \frac{U_n}{V_n} = \frac{\bar{X} - \lambda}{\sqrt{\bar{X}/n}} \xrightarrow{D} Z,$$

Z pemboleh ubah rawak normal piawai. Terbitkan selang keyakinan hampiran 95% bagi λ dengan menggunakan W_n .

- (iii) Antara U_n dan W_n , yang mana satu menghasilkan selang keyakinan yang lebih baik bagi n tetap? Beri justifikasi bagi jawapan anda.

(60/100)

4. (a) (i) Nyatakan lema Neyman-Pearson.

- (ii) Biarkan X_1, X_2, \dots, X_{10} menandai sampel rawak daripada taburan eksponen yang berparameter θ . Cari ujian paling berkuasa saiz- α bagi menguji $H_0: \theta = 2$ lawan $H_1: \theta = 4$ sekiranya $\alpha = 0.05$.

...4/-

- (iii) Sekiranya ruang parameter bagi taburan eksponen di atas ialah $\Theta = \{\theta : \theta \geq 2\}$, berikan ujian PBS bagi menguji $H_0 : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta > 2$.

(40/100)

- (b) Andaikan X cerapan tunggal daripada taburan yang mempunyai fungsi ketumpatan

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x); \theta > 0$$

- (i) Bagi menguji $H_0 : \theta \leq 1$ lawan $H_1 : \theta > 1$, ujian berikut digunakan:

Tolak H_0 jika dan hanya jika $X \geq \frac{1}{2}$. Cari fungsi kuasa dan saiz ujian tersebut.

- (ii) Cari UPBS saiz α bagi menguji

$$H_0 : \theta = 2 \text{ lawan } H_1 : \theta < 2.$$

- (iii) Cari ujian nisbah-kebolehjadian teritlak saiz α untuk menguji

$$H_0 : \theta = 1 \text{ lawan } \theta \neq 1.$$

(60/100)

Lampiran 1

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\dots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^N \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}, qe^t < 1$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, t \neq 0$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + (\sigma t)^2 / 2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}, t < \lambda$
Gama	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha, t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	