

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua  
Sidang 1986/87

MKT361 - Model Kebarangkalian Gunaan

Tarikh: 9 April 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari  
( 3 Jam )

---

Jawab LIMA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Sekeping duit siling adil dilambungkan tiga kali berturut-turut. Katakan  $A_i$  adalah peristiwa bahawa kepala berlaku pada lambungan ke- $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Adakah  $A_1$  dan  $A_2$  tak bersandar? Adakah  $A_2$  dan  $\bar{A}_3$  tak bersandar.

(20/100)

- (b) Suatu kelas terdiri daripada 4 orang lelaki dan 6 orang perempuan. 3 penuntut dipilih dan diminta keluar dari kelas itu. Jantina penuntut-penuntut itu tidak diperhatikan. Kemudian seorang penuntut lagi dipilih dari kelas itu. Berapakah kebarangkalian bahawa penuntut itu adalah seorang lelaki.

(20/100)

- (c) A, B dan C melambungkan sekeping duit siling mengikut giliran A, B, dan C. Sesiapa yang pertama mendapat "kepala" menang. Berapakah kebarangkalian untuk A, B, dan C menang masing-masing?

(30/100)

- (d) Sebuah beg mengandungi 10 keping duit siling yang tak adil di mana kebarangkalian untuk mendapat kepala bagi duit siling ke- $i$  adalah  $i/10$ . Sekeping duit siling dipilih secara rawak dari beg itu dan dilambungkan.

- (i) Adakah kebarangkalian untuk mendapat kepala dan bunga sama?
- (ii) Jika kepala berlaku pada lambungan itu, berapakah kebarangkalian bahawa duit siling ke-4 telah dipilih?

(30/100)

.../2

(MKT361)

2. (a) Dapatkan nilai  $c$  supaya fungsi yang diberi berikut menjadi suatu fungsi ketumpatan (f.k.k.) bagi  $X$ .

$$f(x) = \begin{cases} cx & , 0 \leq x < 1 \\ c & , 1 \leq x < 2 \\ c(3-x) & , 2 \leq x < 3 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Kemudian dapatkan fungsi taburan longgokan (f.t.l.) bagi  $X$ .

(30/100)

- (b) Jika  $X$  mempunyai f.k.k.  $f(x)$  supaya

$$f(c+x) = f(c-x), \quad \forall x \in R_X$$

di mana  $c$  adalah suatu pemalar, tunjukkan bahawa  $E[X] = c$ .

(30/100)

- (c) (i) Suatu pembolehubah rawak  $X$  mempunyai min 4 dan varians 9. Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev dapatkan suatu batas bawah bagi  $P(0 < X < 8)$ . Jika  $X$  tak negatif, dapatkan suatu batas lain bagi kebarangkalian tersebut di atas.

- (ii) Jika  $X$  mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-3} 3^x}{x!} & , x = 0, 1, \dots \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

dapatkan suatu batas bagi  $P(0 \leq X \leq 6)$ .

(40/100)

3. (a) (i) Jika pembolehubah rawak  $X$  mempunyai f.k.k.

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n,$$

tunjukkan bahawa fungsi penjana momen untuk  $X$  ialah

$$M(t) = (1-p+pe^t)^n.$$

- (ii) Katakan  $X$  dan  $Y$  adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar dan masing-masing mempunyai taburan Binomial berikut:

$$X \sim B(n_1, p_1) \text{ dan } Y \sim B(n_2, 1-p_1).$$

Dapatkan f.k.k. bagi  $Z = n_2 + X - Y$ .

(40/100)

(MKT361)

- (b) Katakan f.k.k. tercantum untuk pembolehubah rawak selanjar (X, Y) adalah

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & , 0 < x < 2, -2 < y < 2 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Nilaikan  $P(X + Y \leq b)$ .

(30/100)

- (c) Suatu pembolehubah rawak (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum berikut

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & , x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) dapatkan kov(X, Y).  
(ii) Adakah X dan Y tak bersandar?

(30/100)

4. (a) (X, Y) adalah suatu pembolehubah bivariat yang mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & , 0 < x < 1, x > y \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

dapatkan

- (i) f.k.k. sut bagi X.  
(ii) f.k.k. bersyarat untuk Y diberi  $X = \frac{1}{4}$ .  
(iii)  $E[Y | X = \frac{1}{4}]$ .  
(iv) Fungsi taburan longgokan untuk (X, Y).

(60/100)

.../4

(MKT361)

- (b) Seorang pelombong diperangkap di dalam sebuah lombong yang mempunyai tiga pintu. Pintu pertama menuju ke suatu terowong yang membawanya ke tempat keselamatan selepas dua jam. Pintu kedua menuju ke suatu terowong yang mengembalikannya ke lombong itu selepas tiga jam. Pintu ketiga menuju ke suatu terowong yang mengembalikannya ke lombong itu selepas lima jam. Dengan menganggap kebarangkalian untuk memilih sebarang pintu adalah  $1/3$ , dapatkan panjang masa jangkaan untuk pelombong itu sampai tempat keselamatan.

(40/100)

5. (a) Pertimbangkan sebuah Pejabat Pos yang dilayan oleh dua orang kerani. Tiga orang A, B dan C memasuki pejabat itu secara serentak. A dan B terus dilayan oleh dua kerani itu dan C menunggu sehingga A atau B telah dilayan sebelum dia mendapat layanan. Berapakah kebarangkalian bahawa A masih lagi berada di dalam Pejabat Pos selepas B dan C telah keluar jika

- (i) masa layanan untuk setiap kerani ialah sepuluh minit tepat?  
(ii) masa-masa layanan adalah  $i$  dan kebarangkalian masa layanan sama dengan  $i$  ialah  $1/3$ , untuk  $i = 1, 2, 3$  minit?  
(iii) masa-masa layanan ialah eksponen dengan  $1/\mu$ ?

(50/100)

- (b) Lelaki dan perempuan memasuki sebuah kedai menurut proses Poisson tak bersandar yang masing-masing mempunyai kadar kemasukan dua dan empat orang per minit. Dapatkan kebarangkalian bahawa seorang lelaki memasuki kedai itu sebelum seorang perempuan (masa permulaan adalah sebarang).

(50/100)

6. (a) Untuk rantai markov dengan matriks peralihan yang berikut:

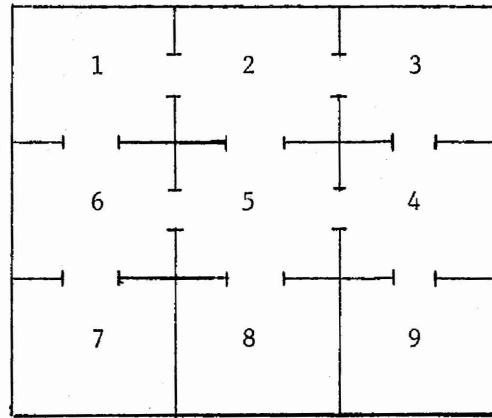
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) tentukan kelas-kelas berkomunikasi.  
(ii) kelaskan keadaan-keadaan sebagai jadi semula atau keadaan fana.

(20/100)

(MKT361)

- (b) Seekor tikus diletak ke dalam sebuah rangkaian lorong (maze) yang diberi di bawah. Tikus itu bergerak melalui petak-petak secara rawak, iaitu, jika terdapat k cara untuk keluar suatu petak, tikus itu boleh memilih setiap cara itu dengan kebarangkalian  $1/k$ . Tikus itu membuat satu tukaran petak pada setiap ketika masa. Keadaan bagi sistem itu ialah nombor untuk petak yang tikus berada. Tentukan ruang keadaan dan matriks peralihan.



(20/100)

- (c) Katakan  $\{X_n; n \geq 0\}$  ialah rantai markov dengan ruang keadaan  $\{0,1,2\}$  dan vektor kebarangkalian awal  $a' = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ , iaitu  $P(X_0 = 0) = \frac{5}{8}$ ,  $P(X_0 = 1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(X_0 = 2) = \frac{1}{8}$ . Jika matriks peralihan satu-langkah adalah

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Hitungkan:

- (i)  $P(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1)$   
(ii)  $P(X_1 = 0, X_2 = 1 \mid X_0 = 0)$   
(iii)  $P_{01}^2$   
(iv)  $P_{11}^3$

215

(30/100)

.../6

(MKT361)

- (d) X dan Y adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar yang masing-masing mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain} \end{cases}$$

dan

$$f(y) = \begin{cases} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y > 0 \\ 0 & , \text{ di tempat lain} \end{cases}$$

dapatkan f.k.k. bagi

- (i)  $X + Y$  dan (ii)  $\max(X, Y)$ .

(30/100)