

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MAT 122 – Persamaan Pembezaan I

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua **EMPAT** soalan.

...2/-

1.(a) Tentukan suatu fungsi $N(x, y)$ supaya persamaan pembezaan berikut adalah tepat

$$\left[y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2 + y} \right] dx + N(x, y) dy = 0.$$

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \tag{A}$$

- (i) Tentukan suatu rantau pada satah xy di mana persamaan di atas mempunyai penyelesaian unik melalui titik (x_0, y_0) yang terletak dalam rantau tersebut. Sokong jawapan anda dengan teorem yang sesuai.
- (ii) Tunjukkan bahawa $y = \tan x$ memenuhi persamaan pembezaan (A) dan syarat $y(0) = 0$.
- (iii) Terangkan mengapa $y = \tan x$ bukan suatu penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

pada selang $(-2, 2)$ tetapi merupakan suatu penyelesaian pada selang $(-1, 1)$.

(Petunjuk : $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
 $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$)

(c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$x dy - y dx = 3x^2(x^2 + y^2) dx. \tag{25/100}$$

2(a) Diberikan bahawa persamaan pembezaan

$$x^3 y^3 (2y dx + x dy) - (5y dx + 7x dy) = 0$$

mempunyai faktor pengamir dalam bentuk $x^\alpha y^\beta$ di mana α dan β adalah pemalar.

- (i) Tentukan nilai-nilai α dan β .
- (ii) Seterusnya, selesaikan persamaan pembezaan tersebut.

(b) Selesaikan persamaan Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3} (1 - 2x) y^4.$$

(25/100)
...3/-

3.(a) Diberikan $D = \frac{d}{dx}$, selesaikan persamaan pembezaan berikut:

(i) $(D^2 + 4)y = x^2 \sin 2x$

(ii) $(D^2 - 6D + 9)y = e^{3x} / x^2$

(b) Selesaikan persamaan pembezaan berikut dalam kuasa x :

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0.$$

(25/100)

4.(a) Dapatkan penyelesaian am bagi sistem berikut:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} e^{6t}.$$

(b) Suatu model yang meramalkan kelakuan pengguna terhadap barangan A diberikan oleh

$$x' = a(y - 2x)$$

$$y' = b(x - 2y) + I_0$$

di mana

$x(t)$ mewakili paras pembelian bagi A,

$y(t)$ sikap pengguna terhadap A,

I_0 adalah kesan iklan yang dianggap tetap sepanjang masa dan a, b ialah nombor positif

(i) Tunjukkan bahawa

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{I_0}{3b}$$

dengan

$$\lambda_1 = -(a + b) - (a^2 + b^2 - ab)^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_2 = -(a + b) + (a^2 + b^2 - ab)^{\frac{1}{2}}$$

dan c_1, c_2 adalah pemalar sebarang.

(ii) Deduksikan bahawa

$$x \rightarrow \frac{I_0}{3b} \text{ apabila } t \rightarrow \infty$$

(iaitu, paras pembelian mendekati suatu paras keseimbangan).

(25/100)