
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2000/2001

April/Mei 2001

MAT 102 –Kalkulus Lanjutan

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **TIGA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA TIGA** soalan. Semua soalan membawa markah yang sama.

1. (a) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1}$$

(ii)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5n+1} \right)^n$$

(iii)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$$

- (b) Adakah f selanjar pada $(0, 0)$? Jelaskan jawapan anda.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

- (c) Cari titik pada satah $-x + 2y + z = 28$ yang terdekat dari titik asalan.

- (d) Katakan $w = f(r,s)$ dengan $r = x + ct$, $s = x - ct$, dan katakan w dan semua terbitannya adalah selanjar di mana-mana. Anggapkan c ialah pemalar bukan sifar.

(i) Tunjukkan bahawa
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right).$$

(ii) Dengan menggunakan (i), tunjukkan bahawa persamaan
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
 akan bertukar menjadi persamaan
$$\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} = 0.$$

2. (a) Diberi $f(x,y) = \sqrt{xy} + x^3 - y^2$, gunakan pembeza seluruh untuk menganggarkan $f(3.1, 2.7)$.

- (b) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri berikut:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} x^n$$

- (c) Uji penumpuan kamiran tak wajar berikut dengan ujian-ujian yang bersesuaian.

(i)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$$

(ii)
$$\int_1^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+3)^2} dx$$

- (d) Tukarkan tertib kamiran berikut kepada $dx dy$:

$$\int_0^3 \int_{x^2+1}^{2x+4} x^2 y \, dy dx .$$

Seterusnya, nilaikan kamiran tersebut sama ada dengan menggunakan tertib $dx dy$ atau $dy dx$ (yang mana yang lebih mudah).

- (e) Cari nilai b yang memberikan

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \dots = 9.$$

3. (a) Cari $\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{s,t}$ (dalam sebutan r, s dan t sahaja) sekiranya

$$w = e^{xyz}, \quad x = r + s + t, \quad y = rst, \quad z = \frac{1}{r}.$$

- (b) Katakan S bongkah dalam oktan yang pertama yang dibatasi oleh sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ dan satah-satah koordinat yz, xz dan xy . Dengan menggunakan koordinat silinder, nilaikan

$$\iiint_S xyz \, dV .$$

- (c) Cari had-had berikut:

$$(i) \quad \text{had}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} \quad (ii) \quad \text{had}_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{n + 2\sqrt{n}} \quad (iii) \quad \text{had}_{n \rightarrow \infty} \cos(n\pi)$$

- (d) Katakan 2 persamaan $F(x,y,u,v) = 0$ dan $G(x,y,u,v) = 0$ mentakrifkan u dan v sebagai fungsi yang terbezakan dalam x dan y . Buktikan bahawa

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial(F,G)/\partial(u,y)}{\partial(F,G)/\partial(u,v)}.$$