UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1986/87

MKT342 - Pengiraan Kejuruteraan II

Tarikh: 22 Jun 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 jam)

Jawab EMPAT soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Pertimbangkan masalah berikut:

$$f''' + ff'' + 1 - (f')^2 = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(\infty) = 1$$

Dengan menggunakan Kaedah Tembak bersama dengan Kaedah Separuh Selang, tulis suatu program FORTRAN untuk menyelesaikan masalah di atas. Subrutin RKSYST yang mengimplementasikan Kaedah Runge-Kutta 4 diberikan di dalam Lampiran.

Apakah perubahan-perubahan yang perlu dibuat kepada program anda jika masalah nilai sempadan yang terlibat adalah

$$f''' - 2f'' - f' + 2 = 0$$

$$f(0) = f'(0) = 0$$

$$f'(1) = \alpha \qquad (\alpha = \text{pemalar})?$$

(100/100)

2. (a) Gunakan kaedah beza terhingga $0(h^2)$ untuk menyelesaikan

$$y'' = 2x + 3y$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

dengan saiz langkah $h = 0.25$.

(30/100)

.../2

(b) Gunakan Kaedah Newton untuk menghampirkan punca sistem berikut:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 = 0$$

$$g(x,y) = x^2 + xy = 0.$$

Gunakan $x_0 = -2$, $y_0 = 1.5$ dan jalankan satu lelaran sahaja.

(30/100)

(c) Dengan menggunakan satu contoh, terangkan apakah masalah nilai eigen untuk persamaan pembezaan biasa.

Terangkan secara matematik bagaimana Kaedah Kuasa dapat menghasilkan nilai eigen yang bermagnitud terbesar. Huraikan prinsip pemindahan nilai eigen dan kaedah kuasa yang menggunakan songsang matriks.

(40/100)

3. (a) (i) Dengan menulis terbitan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ di dalam bentuk $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$, dapatkan suatu ungkapan beza terhingga $0(h^2)$ untuk $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

(ii) Jika

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-u_{i+2} + 16u_{i+1} - 30u_i + 16u_{i-1} - u_{i-2}}{12h^2} + 0(h^4)$$

apakah ungkapan beza terhingga bagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad ?$$

(30/100)

(b) Pertimbangkan masalah yang berikut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{array}$$

$$u(0,y) = u(x,0) = 0$$

$$u(x,0.5) = 200x$$

$$u(0.5,y) = 200y.$$

.../3

Dengan menggunakan kaedah beza terhingga $O(h^2)$, dapatkan sistem linear yang terlibat (dengan $\Delta x = \Delta y = 0.125$) dan selesaikannya dengan Kaedah Gauss-Seidel. Jalankan satu lelaran sahaja.

Terangkan prinsip Kaedah S.O.R. Bolehkah Kaedah S.O.R. digunakan untuk masalah di atas? Terangkan.

(70/100)

4. (a) Selesaikan dengan kaedah tak tersirat persamaan haba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

dengan syarat-syarat

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = x(x-1)$$

Ambil $\Delta x = 1/4$ dan $\Delta t = 1/8$. Berikan komen terhadap hasil yang diperolehi.

(45/100)

(b) Andaikan bahawa U adalah penyelesaian tepat dan u merupakan penyelesaian berangka yang diperolehi melalui kaedah tak tersirat untuk persamaan haba

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Buktikan bahawa, jika $r = \dfrac{\kappa \Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \leqslant \frac{1}{2}$,

penyelesaian $u \to U$ apabila $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$.

[Petunjuk:

(i) $$e_i^{j+1} = r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1-2r)e_i^j - r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) - (1-2r)U_i^j + U_i^{j+1}$$

(ii) $$e_i^{j+1} = r(e_{i+1}^j + e_{i-1}^j) + (1-2r)e_i^j + \Delta t \left\{ \frac{\partial U(x_i, \eta)}{\partial t} - \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 U(\xi, t_j)}{\partial x^2} \right\}$$

(iii) $E^{j+1} \leqslant Mt_{j+1}$] .

(55/100)

5. (a) Terangkan prinsip Kaedah Crank-Nicolson dan mengapa ia dikenali sebagai suatu kaedah tersirat.

Dapatkan sistem linear yang sesuai apabila Kaedah Crank-Nicolson dengan $r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1$ dan $\Delta x = \frac{1}{5}$ digunakan untuk masalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad t \geqslant 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Terangkan mengapa biasanya penghuraian LU harus digunakan untuk menyelesaikan sistem linear yang terlibat.

Dapatkan persamaan beza terhingga Crank-Nicolson untuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

(65/100)

(b) Gunakan kaedah cirian untuk memperolehi penyelesaian persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

pada titik 'grid' cirian pertama di antara titik A(0.3, 0) dan B(0.4, 0) dengan u memenuhi syarat-syarat

$$u(x,0) = x^2 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

[$am^2 - bm + c = 0$

$amdp + cdq + edt = 0$]

(35/100)

- oo0oo -

```
      SUBROUTINE RKSYST (DERIVS, TO, H, XO, XEND, XWRK, F, N)
C  THIS SUBROUTINE SOLVES A SYSTEM OF N FIRST ORDER DIFFERENTIAL
C  EQUATIONS BY THE RUNGE-KUTTA METHOD.  THE EQUATIONS ARE OF THE FORM
C        DX1/DT = F1(X,T) DX2/DT = F2(X,T), ETC.
C  PARAMETERS ARE -
C    DERIVS  A SUBROUTINE THAT COMPUTES VALUES OF THE N DERIVATIVES.
C              IT MUST BE DECLARED EXTERNAL BY THE CALLER.  IT IS
C              INVOKED BY THE STAEMENT
C                CALL DERIVS (X, T, F, N)
C    TO      THE INITIAL VALUE OF INDEPENDENT VARIABLE
C    H       THE INCREMENT TO T, THE STEP SIZE
C    X       THE ARRAY THAT HOLDS THE INITIAL VALUES OF THE FUNCTIONS.
C    XEND    AN ARRAY THAT RETURNS THE FINAL VALUES OF THE FUNCTIONS.
C    XWRK    AN ARRAY USED TO HOLD INTERMEDIATE VALUES DURING THE
C              COMPUTATION.  IT MUST BE DIMENSIONED OF SIZE 4 X N IN THE
C              MAIN PROGRAM
C    N       THE NUMBER OF EQUATIONS IN THE SYSTEM BEING SOLVED.
C    F       AN ARRAY THAT HOLDS VALUES OF THE DERIVATIVES.
      DIMENSION XO(N), XEND(N), XWRK(4,N), F(N)
C  GET FIRST ESTIMATE OF THE DELTA X'S
      CALL DERIVS (XO, TO, F, N)
      DO 10 I = 1,N
        XWRK(1,I) = H*F(I)
        XEND(I) = XO(I) + XWRK(1,I)/2.
10    CONTINUE
C  GET THE SECOND ESTIMATE.  THE XEND VECTOR HOLDS THE X-VALUES.
      CALL DERIVS (XEND, TO+H/2., F, N)
      DO 20 I = 1,N
        XWRK(2,I) = H*F(I)
        XEND(I) = XO(I) + XWRK(2,I)/2.
20    CONTINUE

C  REPEAT FOR THIRD ESTIMATE.
      CALL DERIVS (XEND, TO+H/2., F, N)
      DO 30 I = 1,N
        XWRK(3,I) = H*F(I)
        XEND(I) = XO(I) + XWRK(3,I)
30    CONTINUE
C  NOW GET LAST ESTIMATE.
      CALL DERIVS (XEND, TO+H, F, N)
      DO 40 I = 1,N
        XWRK(4,I) = H*F(I)
40    CONTINUE
C  WE COMPUTE THE X AT THE END OF THE INTERVAL FROM A
C  WEIGHTED AVERAGE OF THE FOUR ESTIMATES, THEN RETURN.
      DO 50 I = 1,N
        XEND(I) = XO(I) + (XWRK(1,I) + 2.*XWRK(2,I) +
     +     2.*XWRK(3,I) + XWRK(4,I))/6.
50    CONTINUE
      RETURN
      END
```