

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

MKT342 - Pengiraan Kejuruteraan II

Tarikh: 6 April 1987

Masa: 2.15 ptg - 5.15 ptg

(3 jam)

Jawab SEMUA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Tunjukkan bahawa sistem persamaan tak linear

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0$$

$$x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0$$

boleh ditulis dalam bentuk masalah titik tetap

$$x_1 = g_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10}$$

$$x_2 = g_2(x_1, x_2) = \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10}$$

Buktikan bahawa $G = (g_1, g_2) : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mempunyai titik tetap unik dalam

$$D = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}.$$

(30/100)

- (b) Diberikan persamaan pembezaan

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b$$

dengan

$$y(a) = \alpha$$

$$y(b) = \beta$$

Dapatkan satu kaedah beza terhingga untuk masalah ini dengan menggunakan hampiran beza pusat untuk terbitan-terbitan tersebut.

(MKT342)

Berikan syarat-syarat yang diperlukan supaya matriks tiga pepenjuru diperolehi dalam kaedah beza terhingga tersebut mempunyai penyelesaian unik.

(35/100)

(c) Bincangkan mengenai

- (i) kaedah kuasa
- (ii) kaedah Newton untuk menyelesaikan sistem persamaan tak linear
- (iii) kaedah tembak (linear).

(35/100)

2. (a) Buktikan dengan menggunakan

- (i) kaedah matriks
- (ii) kaedah siri Fourier (Von Neumann's)

bahawa persamaan beza terhingga

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = r\{\theta(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + (1-\theta)(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})\}$$

yang menganggar persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

stabil apabila $r \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$ bagi $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$.

Buktikan juga bahawa persamaan di atas stabil tak bersyarat bagi $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$.

Petunjuk:

- (i) Anggapkan nilai-nilai sempadan adalah sifar, nilai-nilai awal diketahui dan $0 \leq \theta \leq 1$
- (ii) Bagi suatu matriks $A \in M_{n \times n}$

(MKT342)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & b & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c & a \end{pmatrix}$$

nilai-nilai eigen A , λ_s , diberikan oleh rumus

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{s\pi}{n+1}$$

$$s = 1, \dots, n$$

(45/100)

(b) Diberikan masalah persamaan pembezaan separa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

dengan syarat awal $u(x,0) = 1-x^2$, $0 \leq x \leq 1$ dan syarat-syarat sempadan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$$

$$u(1,t) = 0$$

Dapatkan suatu persamaan beza terhingga bagi masalah di atas dengan menggunakan hampiran beza pusat untuk

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}$$

dan hampiran beza ke depan untuk $\frac{\partial u}{\partial t}$. Jika jaringan beza terhingga tersebut dibahagikan dengan $h = \delta x = 0.1$, dan $k = \delta t = 0.0001$, maka cari nilai u_{01} dan u_{11} .

(45/100)

(c) Tuliskan teorem kesetaraan Lax.

(10/100)

(MKT342)

3. (a) Bagi persamaan Poisson

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y) \text{ dalam } \Omega$$

syarat-syarat sempadan $u(x,y)$ diberikan, dan Ω adalah suatu segiempat sama dengan jaringan bersaiz h .

Dapatkan suatu skema beza 5 titik bagi persamaan di atas. Jika $\Omega = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

$$f(x,y) = 8u(x,y)$$

$$u(x,y) = 0 \text{ di atas } x = \pm 1$$

$$u(x,y) = 80(1-x^2) \text{ di atas } y = \pm 1$$

$$h = 0.5$$

selesaikan persamaan pembezaan separa di atas.

(45/100)

- (b) Terangkan bagaimana kita dapat menyelesaikan sistem persamaan linear $\underline{AX} = \underline{b}$ dengan menggunakan

- (i) kaedah Jacobi
- (ii) kaedah Gauss-Siedel
- (iii) kaedah SOR.

(35/100)

- (c) Jika μ adalah nilai eigen bagi matriks lelaran Jacobi $D^{-1}(L + U)$, dan λ adalah nilai eigen bagi matriks lelaran SOR $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}\{(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U\}$, tunjukkan bahawa

$$(i) \quad \det(\mu D - L - U) = 0$$

$$(ii) \quad \det(kD - \lambda \omega L - \omega U) = 0 \text{ dengan } k = \lambda + \omega - 1.$$

(20/100)