
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2009/2010

Jun 2010

MAT 122 – Differential Equations I
[Persamaan Pembezaan I]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

[Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) (i) Verify that each of the functions $y_1(x) = 1 - x$ dan $y_2(x) = -x^2/4$ is a solution for the initial value problem

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

- (ii) On which interval is each solution valid?
- (iii) Explain why the existence of two solutions for the above initial value problem does not contradict with the Existence and Uniqueness theorem.
- (b) (i) The differential

$$y(2xy + 1)dx + x(1 + 2xy - x^3y^3)dy = 0$$

has an integrating factor in the form of $\frac{1}{(xy)^k}$. Determine the value of k .

- (ii) Hence, solve the differential equation.

- (c) Solve the differential equation

$$x \frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$$

[100 marks]

2. (a) Solve

$$y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$$

- (b) Let y_1 and y_2 be solutions for the homogeneous equation corresponding to

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (A)$$

Let $W(x)$ be the Wronskian for y_1 and y_2 and $W(x) \neq 0$ on the interval $a < x < b$. Show that a particular solution for (A) is given by

$$y_p = \int_a^x \frac{f(\beta)[y_1(\beta)y_2(x) - y_1(x)y_2(\beta)]d\beta}{W(\beta)}$$

[100 marks]

1. (a) (i) Tentusahkan bahawa fungsi – fungsi $y_1(x)=1-x$ dan $y_2(x)=-x^2/4$ setiap satunya adalah penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = \frac{-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad y(2) = -1$$

- (ii) Di selang manakah setiap penyelesaian ini sah?
 (iii) Terangkan mengapakah kewujudan dua penyelesaian bagi masalah nilai awal di atas tidak bercanggah dengan Teorem Kewujudan dan Keunikan.

- (b) (i) Persamaan pembezaan

$$y(2xy+1)dx + x(1+2xy-x^3y^3)dy = 0$$

mempunyai suatu faktor pengamir dalam bentuk $\frac{1}{(xy)^k}$. Tentukan nilai k.

- (ii) Seterusnya, selesaikan persamaan pembezaan tersebut.

- (c) Selesaikan persamaan pembezaan

$$x \frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{\frac{4}{3}}$$

[100 markah]

2. (a) Selesaikan

$$y'' - 4y' + 4y = x^3e^{2x} + xe^{2x}$$

- (b) Katakan y_1 dan y_2 adalah penyelesaian bagi persamaan homogen bersepadan dengan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (A)$$

Katakan $W(x)$ ialah Wronskian bagi y_1 dan y_2 dan $W(x) \neq 0$ pada selang $a < x < b$. Tunjukkan bahawa satu penyelesaian khusus bagi (A) diberikan oleh

$$y_p = \int_a^x \frac{f(\beta)[y_1(\beta)y_2(x) - y_1(x)y_2(\beta)]d\beta}{W(\beta)}$$

[100 markah]

3. (a) Solve the differential equation

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

about the ordinary point $x=0$. State the interval on which the solution is valid.

- (b) Consider the initial value problem

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

- (i) By using Euler's formula, show that

$$y_k = y_{k-1} + h(x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- (ii) Show that

$$y_n = y_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + y_i^2), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- (iii) Given $x_0 = 0$ and $y_0 = 1$, estimate $y(0.3)$ using $h = 0.1$.

- (iv) What is the upper bound for the accumulated formula error for your answer in (iii)?

[100 marks]

4. (a) Given that x, y and z are functions in t and

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y - 2z, \quad \frac{dz}{dt} = -y + 3z,$$

solve the above system of equations.

- (b) A model for the competition between two species with population densities x and y leads to the differential equation

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx + dy$$

where a, b, c, d are positive constants.

3. (a) Selesaikan persamaan pembezaan

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

sekitar titik biasa $x=0$. Nyatakan selang di mana penyelesaian ini sah.

- (b) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

- (i) Tunjukkan dengan menggunakan rumus Euler bahawa

$$y_k = y_{k-1} + h(x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2), \quad k=1, 2, 3, \dots$$

- (ii) Tunjukkan bahawa

$$y_n = y_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} (x_i^2 + y_i^2), \quad n=1, 2, 3, \dots$$

- (iii) Diberi $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$, anggarkan $y(0.3)$ dengan menggunakan $h=0.1$.

- (iv) Apakah suatu batas atas bagi ralat rumus tertumpuk bagi jawapan anda di (iii)?

[100 markah]

4. (a) Diberikan x, y dan z adalah fungsi – fungsi dari t dan

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 3y - 2z, \quad \frac{dz}{dt} = -y + 3z,$$

selesaikan sistem persamaan pembezaan tersebut.

- (b) Perkembangan bagi dua spesies yang bersaing untuk suatu sumber makanan diwakili oleh dua persamaan

$$\frac{dx}{dt} = ax - by, \quad \frac{dy}{dt} = -cx + dy$$

dengan x, y sebagai populasi kedua – dua spesies dan a, b, c, d ialah pemalar – pemalar positif.

- (i) Show that x satisfies

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d)\frac{dx}{dt} + (ad-bc)x = 0$$

- (ii) Show that x has a solution of the form

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

with at least one α_i positive.

- (iii) Find the solution for x .

- (iv) Using the values $a=d=4$, $b=1$, $c=4$ and $x(0)=700$, $y(0)=3400$, determine the time t when one of the species becomes extinct.

[100 marks]

- (i) Tunjukkan bahawa x memenuhi

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a+d)\frac{dx}{dt} + (ad-bc)x = 0$$

- (ii) Tunjukkan bahawa x mempunyai penyelesaian di dalam bentuk

$$x = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dengan sekurang – kurangnya satu α_i positif.

- (iii) Cari penyelesaian bagi x .

- (iv) Dengan menggunakan nilai $a=d=4$, $b=1$, $c=4$ dan $x(0)=700$, $y(0)=3400$, tentukan bilakah satu spesies menjadi pupus.

[100 markah]

- 000 O 000 -