
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2009/2010

Jun 2010

MAT 101 – Calculus
[Kalkulus]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

Arahan: Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let C be a curve given by an equation

$$y^2 = 2x^3y + e^x$$

- (a) Find y and $\frac{dy}{dx}$ when $x=0$

- (b) Determine the equations of tangent lines to the curve C at $x=0$.

[7 marks]

2. Let $f, g: D \rightarrow R$ be two continuous functions on D .

If $a, b \in D$ and $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a$, $g(b) = b$, show that there exists $c \in (a, b)$ such that $f(c) = g(c)$

[7 marks]

3. Let $f, g: Z \rightarrow Z$ be two functions that satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + g(x)$$

where x, y belongs to Z , Z is a set of integers.

Show that $f(0) = 0$

[7 marks]

4. By intermediate value theorem show that there exists a real root to the equation

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

[7 marks]

5. Show that $e^{x^2} \leq e^x$ for $0 \leq x \leq 1$.

Hence show that

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$$

[7 marks]

6. Find $\frac{dy}{dx}$ of $\sin(x+y) = xy^2 - e^x + 1$ at $x=0$.

[7 marks]

1. Andai C suatu lengkung diberi sebagai suatu persamaan

$$y^2 = 2x^3y + e^x$$

(a) Cari y dan $\frac{dy}{dx}$ apabila $x=0$

(b) Tentukan persamaan garis tangen terhadap lengkung C pada $x=0$.

[7 markah]

2. Andai $f, g: D \rightarrow R$ sebagai dua fungsi pada D .

Jika $a, b \in D$ dan $f(a) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = a$, $g(b) = b$, tunjukkan bahawa wujud suatu nilai $c \in a, b$ sedemikian hingga $f(c) = g(c)$

[7 markah]

3. Andai $f, g: Z \rightarrow Z$ sebagai dua fungsi yang memenuhi

$$f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

dengan x, y unsur kepada Z , Z ialah suatu set integer.

Tunjukkan bahawa $f(0) = 0$

[7 markah]

4. Dengan teorem nilai pertengahan, tunjukkan bahawa wujud suatu punca nyata terhadap persamaan

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

[7 markah]

5. Tunjukkan bahawa $e^{x^2} \leq e^x$ untuk $0 \leq x \leq 1$.
Justeru tunjukkan bahawa

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$$

[7 markah]

6. Cari $\frac{dy}{dx}$ untuk $\sin(x+y) = xy^2 - e^x + 1$ pada $x=0$.

[7 markah]

7. Find the following limits:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2}$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h^7 - x^7}{h}$

[7 marks]

8. Let $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}^2$$

- (a) Find the first derivative of f
- (b) Obtain the horizontal and vertical asymptotes of f .
- (c) Determine the local extremums of f
- (d) Obtain the interval on which the function f is increasing and decreasing.

[7 marks]

9. Find the area of a region enclosed by the curve $y = xe^x$, x -axis and $x = 1$.

[7 marks]

10. The curve C is given by

$$y = x(x-3)$$

A line given by $y = mx - 1$ is tangential to the curve C .

Find the values of m .

[7 marks]

7. Cari had berikut:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x^2}$$

$$(c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h^7 - x^7}{h}$$

[7 markah]

8. Andai $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ diberi sebagai

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}^2$$

- (a) Cari terbitan pertama f
- (b) Dapatkan asimptot mengufuk dan menegak f .
- (c) Dapatkan nilai ekstrimum setempat f
- (d) Dapatkan selang supaya fungsi f adalah menokok dan menyusut.

[7 markah]

9. Cari keluasan rantau yang dibatasi oleh $y = xe^x$, paksi- x dan $x = 1$.

[7 markah]

10. C adalah suatu lengkung diberi sebagai

$$y = x(x-3)$$

Suatu garis $y = mx - 1$ adalah tangen kepada C .

Cari nilai m .

[7 markah]