UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2009/2010

Jun 2010

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all ten** [10] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Find the orthogonal projection of the vector $\boldsymbol{u}=(2,1,3)$ onto the subspace of $\mathbb{R}^3$ spanned by the vectors $\boldsymbol{v_1}=(1,1,0)$ and $\boldsymbol{v_2}=(1,2,1)$ by using a least squares solution. Can we find the orthogonal projection using Gram-Schmidt technique?
If yes, describe the technique

[12 marks]

2. Find a subset of the vectors that form a basis for the space spanned by the vectors $\boldsymbol{v_1}=(1,-1,5,2)$, $\boldsymbol{v_2}=(-2,3,1,0)$, $\boldsymbol{v_3}=(4,-5,9,4)$, $\boldsymbol{v_4}=(0,4,2,-3)$, $\boldsymbol{v_5}=(-7,18,2,-8)$, then expressed each vector that is not in a basis as a linear combination of the basis vectors;

[10 marks]

3. (a) Find the rank and nullity of the matrix $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Determine whether vector $\boldsymbol{u}=(-1,1,0,2)$ is orthogonal to the subspace spanned by $\boldsymbol{w_1}=(1,1,0,0)$, $\boldsymbol{w_2}=(1,-1,3,0)$ and $\boldsymbol{w_3}=(4,0,9,2)$.

[10 marks]

4. (a) Let H be the set of all vectors of the form $\begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R}$. Find a vector $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^3$ such that $H=\text{span}\,\{\boldsymbol{v}\}$. Does this show that H is a subspace of $\mathbb{R}^3$? Justify your answer.

(b) If A is a 3×5 matrix, then the number of leading 1's in the reduced row echelon form of A is at most 4 and the number of parameters in the general solution of $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ is at most 2. Is this statement true? Justify your answer.

[10 marks]

5. Find a matrix P that diagonalizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

[10 marks]

1. *Dapatkan unjuran orthogonal bagi vektor* $\mathbf{u}=(2,1,3)$ *dalam subruang* $\mathbb{R}^3$ *direntangi oleh vektor* $\mathbf{v}_1=(1,1,0)$ *dan* $\mathbf{v}_2=(1,2,1)$ *menggunakan penyelesaian kuasa dua terkecil. Bolehkan unjuran orthogonal bagi vektor* $\mathbf{u}$ *itu diperolehi menggunakan teknik Gram-Schmidt?*
Jika ya, terangkan teknik penyelesaiannya.

[12 markah]

2. *Dapatkan subset vektor yang membentuk asas bagi ruang yang direntangi oleh vektor-vektor*
$\mathbf{v}_1=(1,-1,5,2)$, $\mathbf{v}_2=(-2,3,1,0)$, $\mathbf{v}_3=(4,-5,9,4)$, $\mathbf{v}_4=(0,4,2,-3)$, $\mathbf{v}_5=(-7,18,2,-8)$,
kemudian dapatkan gabungan linear vektor asas bagi setiap vektor yang bukan asas.

[10 markah]

3. (a) *Dapatkan pangkat dan nuliti bagi matriks* $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) *Tentukan sama ada vektor* $\mathbf{u}=(-1,1,0,2)$ *adalah ortogonal kepada subruang yang direntangi oleh vektor* $\mathbf{w}_1=(1,1,0,0)$, $\mathbf{w}_2=(1,-1,3,0)$ *dan* $\mathbf{w}_3=(4,0,9,2)$.

[10 markah]

4. (a) *Biar H adalah set vektor dalam bentuk* $\begin{bmatrix} 2t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}; t\in\mathbb{R}$. *Dapatkan suatu vektor* $\mathbf{v}$ *dalam* $\mathbb{R}^3$ *dimana H=rentang {*$\mathbf{v}$*}. Adakah ini menunjukkan H suatu subruang dalam* $\mathbb{R}^3$**?**
Jelaskan jawapan anda.

(b) *Jika A adalah matriks 3×5, maka bilangan lajur paksi 1 dalam baris eselon terturun yang paling tinggi boleh dicapai adalah 4 dan bilangan parameter dalam penyelesaian* $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ *yang tertinggi boleh dicapai adalah 2. Adakah pernyataan ini benar? Berikan alasan pada jawapan anda.*

[10 markah]

5. *Dapatkan matriks P yang memenjurukan matriks* $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

[10 markah]

6. (a) Given a matrix $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; find A^{-1} and what can you conclude on the solution set of $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(b) Given that $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=-6$, find $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2g-4d & 2h-4e & 2i-4f \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

[10 marks]

7. Suppose A,B and C are $n\times n$ square matrices. Indicate whether each statement is true or false.
(i) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.
(ii) $(AB)^2=A^2B^2$.
(iii) If AB=AC, then B=C.
(iv) If A is invertible, then A^T is invertible and $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.
(v) $\det(3A)=3\det(A)$.

[10 marks]

8. Let

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right]$$

be the augmented matrix for a linear system. Find for what values of a and b the system has
(a) a unique solution,
(b) no solution.

[10 marks]

9. Find the standard matrix for the linear operator $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ that
(a) first rotates a vector counterclockwise about the x-axis through an angle 30^0, then rotates a vector counterclockwise about the z-axis through an angle 30^0, and then followed by a contraction with factor $k=1/4$.
(b) first made a reflection about the xy-plane, then followed by a dilation with factor $k=\sqrt{2}$.

[10 marks]

6. (a) Diberi matriks $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; dapatkan A^{-1} dan apa yang boleh dirumuskan tentang set penyelesaian bagi sistem linear $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

(b) Diberi $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, dapatkan $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2g-4d & 2h-4e & 2i-4f \\ d & e & f \end{vmatrix}$.

[10 markah]

7. Jika A,B dan C adalah matriks $n\times n$. Tentukan sama ada pernyataan berikut benar atau palsu.

(i) $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.

(ii) $(AB)^2=A^2B^2$.

(iii) Jika $AB=AC$, maka $B=C$.

(iv) Jika A tersongsangkan, maka A^T juga tersongsangkan dan $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

(v) penentu(3A)=3penentu(A).

[10 markah]

8. Diberi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array}\right]$$

sebagai matriks imbuhan untuk suatu system linear. Dapatkan nilai a and b untuk menjadikan

(a) sistem ini mempunyai penyelesaian unik,

(b) sistem ini tiada penyelesaian.

[10 markah]

9. Cari matriks asas untuk operator linear $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ di mana

(a) bermula dengan putaran vektor ikut lawan arah jam pada satah-x di 30^0, kemudian diikuti putaran vektor ikut lawan arah jam pada satah-z di sudut 30^0, dan akhirnya diikuti dengan pengecilan imej dengan faktor $k = 1/4$.

(b) bermula dengan refleksi pada satah-xy kemudian diikuti dengan pembesaran imej vektor pada faktor $k=\sqrt{2}$.

[10 markah]

10. (a) Given a linear transformation $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by the equations

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Is T a one-to-one transformation? Justify your answer.

[8 marks]

10. (a) *Diberi transformasi linear* $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *yang didefinisikan dalam bentuk persamaan*

$$\begin{aligned} w_1 &= 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= 3x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Adakah T *suatu transformasi satu-ke-satu? Berikan alasan kepada jawapan anda.*

[8 markah]

- ooo O ooo -