
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2009/2010

Jun 2010

MAA 101 – Calculus for Science Students I
[Kalkulus untuk Pelajar Sains I]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all ten** [10] questions.

Arahan : Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. If $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ show that $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$.

[7 marks]

2. (a) Let f a product of two functions defined by $f(x) = \sqrt{2x+1} \ln(5-x)$. Find the domain of f .
- (b) Find the interval of x that satisfies $x+2|x| \leq 6$.

[9 marks]

3. Evaluate the following limit. The L'Hospital rule can be applied whenever applicable.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{|x^2-4|}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(3x^2+1)$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$.

[12 marks]

4. (a) Given $f(x) = \begin{cases} x^2+a, & x \leq 1 \\ bx, & x > 1 \end{cases}$

Find a and b so that f is differentiable at $x=1$.

- (b) Show that the equation $\frac{1}{x+1} = x^2 - x - 1$ on the interval $[1, 2]$ has at least one solution.

[10 marks]

...3/-

1. Jika $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, tunjukkan bahawa $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x))$.

[7 markah]

2. (a) Biarkan f hasil darab dua fungsi yang ditakrif sebagai $f(x) = \sqrt{2x+1} \ln(5-x)$.
Cari domain f .

- (b) Dapatkan selang bagi x yang memenuhi $x+2|x| \leq 6$.

[9 markah]

3. Nilaikan had berikut. Hukum L'Hospital boleh digunakan di tempat yang sesuai.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{|x^2-4|}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(3x^2+1)$.

(c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$.

[12 markah]

4. (a) Diberi $f(x) = \begin{cases} x^2+a, & x \leq 1 \\ bx, & x > 1 \end{cases}$

Dapatkan a dan b sedemikian f terbezakan pada $x=1$.

- (b) Tunjukkan bahawa persamaan $\frac{1}{x+1} = x^2 - x - 1$ pada selang $[1, 2]$ mempunyai sekurang-kurangnya satu penyelesaian.

[10 markah]

5. Find the derivative $\frac{dy}{dx}$ of the following equations.

(a) $y = (\tan 3x - e^x) \sqrt{x^2 + 5}$.

(b) $\sin(x + y^2) = x^2 + 2y$.

[8 marks]

6. (a) Find the constants α , β and δ that guarantee the graph of $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta$ will have a local maximum at $(-3, 18)$ and a local minimum at $(1, -14)$.

(b) Find the equation of tangent line to the curve $y = \frac{3x-4}{3x^2+x-5}$ at the point $A(1, 1)$.

[10 marks]

7. (a) Find the absolute extrema value of $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ on the interval $[0, 2]$.

(b) Sketch a graph of a function g that is continuous and differentiable on interval $[-1, 4]$ and satisfies the following conditions:

(i) the function g is decreasing on $(1, 3)$ and increasing $[-1, 1)$ and $(3, 4]$.

(ii) the largest value of g is 5 and the smallest value of g is 0.

(iii) the graph of g has local extrema at $(1, 5)$ and $(3, 4)$.

[11 marks]

8. Evaluate the following integral.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

(b) $\int x \tan^{-1} x dx$.

[10 marks]

...5/-

5. Dapatkan pembezaan $\frac{dy}{dx}$ persamaan-persamaan berikut.

(a) $y = (\tan 3x - e^x) \sqrt{x^2 + 5}$.

(b) $\sin(x + y^2) = x^2 + 2y$.

[8 markah]

6. (a) Dapatkan pemalar α, β dan δ yang menjamin bahawa graf $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \delta$ akan mempunyai maksimum tempatan pada $(-3, 18)$ dan minimum tempatan pada $(1, -14)$.

(b) Dapatkan persamaan suatu garis tangen kepada lengkung $y = \frac{3x-4}{3x^2+x-5}$ pada titik $A(1, 1)$.

[10 markah]

7. (a) Dapatkan nilai ekstrema mutlak bagi $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ pada selang $[0, 2]$.

(b) Lakarkan graf untuk fungsi g yang selanjur dan terbezakan pada selang $[-1, 4]$ dan memenuhi keadaan berikut:

(i) fungsi g menyusut pada $(1, 3)$ dan menokok pada $[-1, 1)$ dan $(3, 4)$

(ii) nilai terbesar bagi g ialah 5 dan nilai terkecil bagi g ialah 0.

(iii) graf g mempunyai ekstrema tempatan pada $(1, 5)$ and $(3, 4)$.

[11 markah]

8. Nilaikan kamiran berikut.

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

(b) $\int x \tan^{-1} x dx$.

[10 markah]

...6/-

9. (a) Show that $\frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = x^2 + 3x + 1 + \frac{8x - 1}{x^2 - x - 2}$.

Hence, evaluate $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} dx$

(b) Given F is a continuous function such that

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2t+1}{t+2} dt$$

What is $F'(1)$?

[10 marks]

10. Let \mathbf{R} be the region bounded by the graphs of equations $y = x$ and $y = 2x - x^2$.

(a) Sketch the region \mathbf{R} and find its area.

(b) Set up without evaluating the integral for the volume of the solid obtained by rotating the region \mathbf{R} about the specified line using **both** cylindrical shell and washer method.

(i) y -axis

(ii) $y = 2$

(iii) $x = -1$

[13 marks]

9. (a) Tunjukkan bahawa $\frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} = x^2 + 3x + 1 + \frac{8x - 1}{x^2 - x - 2}$.

Seterusnya nilaikan $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2} dx$

(b) Diberi F suatu fungsi yang selanjur yang mana

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2t+1}{t+2} dt$$

Apakah $F'(1)$?

[10 markah]

10. Biarkan \mathbf{R} rantau yang di batasi oleh persamaan $y = x$ dan $y = 2x - x^2$.

(a) Lakarkan rantau \mathbf{R} dan cari luas rantau tersebut.

(b) Nyatakan tanpa menilaikan, kamiran untuk isipadu bongkah kisanan yang terhasil apabila rantau \mathbf{R} dikisarkan terhadap garis yang dispesifikasikan menggunakan *kedua-kedua* kaedah petala selinder dan 'washer'.

(i) y -axis

(ii) $y = 2$

(iii) $x = -1$

[13 markah]