UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

MAT413 - Aljabar Moden II

Tarikh: 12 April 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tgh.
( 3 jam )

---

Jawab EMPAT soalan sahaja; soalan 1 adalah wajib. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (A) Bagi setiap soalan berikut, pilih jawapan yang terlalu sesuai. Kalau jawapan-jawapan yang disediakan tidak sesuai samasekali, pilih X.

(i) $W = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta+a & -\beta & a \\ \gamma+a & \alpha & \gamma+a \end{pmatrix} \middle| \ \alpha,\beta,\gamma,\ a \in \mathbb{R} \right\}$. Dim(W) ialah

(a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5, (f) X.

(ii) Salah suatu set berikut tak bersandar linear.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$,

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$,

(f) X.

.../2

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ . $W = \left\{ X \middle| AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Dim(W) =

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4, (f) X.

(iv) S adalah suatu subset dari $M_{n \times n}$. S adalah subruang jika:

(a) $S = \{A | A$ tak singular$\}$

(b) $S = \{A | A$ adalah singular$\}$

(c) $S = \{A | A - I_n$ tak singular$\}$

(d) $S = \{A | A^T = -4A\}$

(e) $S = \{A | A$ adalah singular dan tak singular$\}$

(f) $S = \{A | A^2 = A^T\}$.

(v) Salah suatu fungsi berikut adalah transformasi linear:

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos y \end{pmatrix}$

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x - 2y \\ x + 4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(d) $T : P_2 \to P_2$ sedemikian $T(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx$
$+(a-b-c)$

(e) $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ sedemikian $T(A) = A^2$ .

(vi) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ . Maka

(a) T adalah satu-ke-satu
(b) T adalah menyeluruh
(c) $\dim(R_T) = 2$
(d) $\dim(N_T) = 2$
(e) $N_T = R_T$
(f) X .

(vii) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ dan $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

adalah asas tertib bagi $\mathbb{R}^3$ dan $\mathbb{R}^2$ masing-masing. $T_{12} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Maka $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} T_{12} =$

(a) $x - z - 2y$, (b) $x + z - 2y$, (c) $x + z + 2y$,

(d) $z - x - 2y$, (e) $z - x - 2y$, (f) X.

(viii) $U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$ dan

$W = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \in \mathbb{R} \right\}$

Maka dim $[A(U \cap W)]$ ialah:

(a) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3, (3) 4, (f) X.

*(60/100)*

(B) $T : V \to V$ adalah suatu transformasi linear dan $\dim(R_T) = \dim(R_{T^2})$. Cari $(R_T \cap N_T)$. Kalau A dan B adalah asas tertib bagi V, buktikan $|[T]_A - \lambda I| = |[T]_B - \lambda I|$.

*(40/100)*

2. (a) Kalau $T : V \to W$ adalah suatu transformasi linear, buktikan $\dim(R_T) + \dim(N_T) = \dim(V)$.

*(40/100)*

(b) $T : M_{2 \to 2} \to M_{2\times 2}$ sedemikian:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & 2a + b + 6c \\ -b - 2c & a - b \end{pmatrix}$$

Cari asas masing-masing bagi $R_T$ dan $N_T$.

*(20/100)*

(c) Jika S, T adalah transformasi linear dari Hom(V, V), buktikan

$\dim(R_{ST}) = \dim(R_{TS}) = \dim R_T$ jika S adalah 1 -1.

*(40/100)*

3. (a) $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ dan $B = \{w_1, \ldots, w_m\}$ adalah asas tertib bagi ruang vektor V dan W masing-masing. Takrifkan $T_{ij} : V \to W$ oleh $vT_{ij} = \lambda_i w_j$, $\lambda_i$ adalah koordinat ke-i dari v berhubung dengan A. Buktikan:

   (i) $T_{ij}$ adalah suatu fungsi

   (ii) $T_{ij} \in \mathrm{Hom}(V, W)$

   (iii) $\{T_{ij} \mid i=1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}$ tak bersandar linear.

   *(40/100)*

   (b) Katakan $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$ dan $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

   adalah asas tertib bagi $\mathbb{R}^3$ dan $\mathbb{R}^2$ masing-masing.

   Cari $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} T_{22}$ .

   *(20/100)*

   (c) W adalah suatu subruang bagi V, buktikan

   (i) $\dim(W) + \dim[A(W)] = \dim(V)$

   (ii) $A[A(W)] = W$.

   *(40/100)*

4. (a) Katakan $T : V \to V$ adalah suatu transformasi linear dengan asas tertib A dan B. Takrifkan matriks peralihan $P_{AB}$ dari A ke B dan buktikan $[T]_B = P_{BA}^{-1}[T]_A\, P_{BA}$.

   *(40/100)*

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ adalah suatu transformasi linear sedemikian $T\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}x+y\\y+z\\z+x\end{pmatrix}$ .

   $C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ , $D = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$

   Cari $[T]_C$ dan $[T]_D$ dan juga suatu matriks Q yang tak singular sedemikian $Q[T]_D = [T]_C\, Q$.

   *(20/100)*

(c) Katakan $S, T \in \text{Hom}(V, V)$ dan $C$ adalah suatu asas tertib bagi $V$. Buktikan

$$[ST]_C = [S]_C[T]_C .$$

*(40/100)*

5. (a) $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ adalah suatu asas bagi $\mathbb{R}^3$. Bentukkan suatu asas ortonomal $\{u_1, u_2, u_3\}$ bagi $\mathbb{R}^3$ sedemikian $u_1$ dan $v_1$ adalah selari.

*(30/100)*

(b) $A$ adalah suatu matriks $2 \times 2$. Buktikan: $A$ adalah simetri $\Leftrightarrow$ wujud $P$ yang berortogon sedemikian hingga $P^{-1}AP$ adalah pepenjuru.

*(30/100)*

(c) $W$ adalah subruang dari $\mathbb{R}^n$. Buktikan wujudnya suatu subruang $U$ dari $\mathbb{R}^n$ sedemikian

$$\mathbb{R}^n = W + U, \quad W \cap U = \{\tilde{0}\} .$$

*(15/100)*

(d) $A$ adalah suatu matriks $2 \times 2$ yang berortogon dan $|A| = 1$.

Tunjukkan $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

*(25/100)*

- oooOooo -