UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

PEPERIKSAAN SEMESTER TAMBAHAN
SIDANG AKADEMIK 1993/94

MAT 413 - Aljabar Moden II

Masa: 3 Jam

Jawab **SEMUA** soalan.

1(a) U dan W adalah subruang bagi suatu ruang V. Buktikan:

(i) $U \cap W$ dan $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$ adalah subruang bagi V

(ii) $\dim (U \cap W) + \dim (U + W) = \dim U + \dim (W)$

(b) Diberi $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y-x \\ y & z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in R \right\}$ dan $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in R \right\}$.

Cari suatu asas bagi:

(i) $U \cap W$

(ii) $U + W$

(c) Diberi $U = \left\{ \begin{pmatrix} x - y + z + w \\ y - 2z - w \\ x + 3y - z \\ o \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z, w \in R \right\}$ dan $U^{\perp} = \{ w \mid w \cdot u = o \}$.

Cari suatu asas ortonormal bagi:

(i) U

(ii) $U^{\perp}$

(iii) $U + U^{\perp}$

(iv) $U \cap U^{\perp}$

2(a) A adalah matriks n x n. Buktikan:

(i) $AX_i = \lambda_i X_i$, $\lambda i \neq \lambda j$ bagi $i \neq j$, $(i = 1, \ldots, n)$

$\Rightarrow \{ X_i \mid i = 1, \ldots, n \}$ tak bersandar linear.

(ii) A terpeperjusukan $\Leftrightarrow$ A mempunyai n vektor eigen yang tak bersandar linear.

(b) Diberi $A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cari P (tak singular) sedemikian

$P^{-1}AP$ = bentuk berkanun Jordan A.

3(a) $T : V \longrightarrow W$ adalah suatu transformasi linear. Buktikan:

(i) $N_T = \{ v \in V \mid T(v) = \tilde{O}_w \}$ adalah suatu subruang bagi V.

(ii) $R_T = \{ T(v) \mid v \in V \}$ adalah suatu subruang bagi W.

(iii) $\dim(N_T) + \dim(R_T) = \dim(V)$.

(b) Diberi $T : R^4 \longrightarrow M_{2x2}$ sedemikian $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z & x-y+w \\ y-2z+w & x+z-w \end{pmatrix}$.

Cari suatu asas bagi N_T dan R_T.

(c) Cari:

(i) $Mg\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $g : y = 3x + 1$

(ii) $R\left[(1, 0), o°\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) luas imej $\left[Mg\, R(O, \vartheta)\, K_X(3)\ \ P_Y(4)\ T_{\binom{1}{2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\right]$ segiempat ABCD yang

mana A(1, 2), B(0, 3), C(1, -1) dan D(4, 3) adalah 4 titik dalam R^2.

(100/100)

4(a) Diberi $T : V \longrightarrow V$ adalah suatu transformasi linear; A dan B adalah asas tertib bagi V. Buktikan:

(i) $[T]_{AB}\,[X]_A = [T(X)]_B$

(ii) $T = I \Rightarrow [I]_{AB}\,[I]_{BA} = I_{nxn}$

(iii) $[T]_{AA} = [I]_{AB}^{-1}\,[T]_{BB}\,[I]_{AB}$

(b) Diberi $T : R^3 \longrightarrow R^3$ sedemikian $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} X$; A asas semulajadi dan $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ asas tertib bagi R^3. Tentusahkan (a)(i), (ii) dan (iii).

(c) Diberi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Buktikan A terpepenjurukan secara berortogon.

(100/100)