UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1987/88

MAT368 - Proses Stokastik Gunaan

Tarikh: 23 Jun 1988

Masa: 2.15 ptg. - 5.15 ptg.
(3 Jam)

Jawab KELIMA-LIMA soalan.

1. (a) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah pembolehubah rawak yang bertaburan seragam dan saling tak bersandar. Tiap-tiap pembolehubah rawak mengambil nilai-nilai $1, 2, \ldots, N$.

   (i) Berikan fungsi penjana kebarangkalian bagi $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

   (ii) Dengan menggunakan hasil daripada (i) dapatkan taburan bagi S_n.

   (40/100)

   (b) Andaikan X adalah suatu pembolehubah rawak Poisson dengan parameter λ. Katakan λ sendiri adalah suatu pembolehubah rawak yang tertabur mengikuti suatu taburan eksponen dengan min $= \frac{1}{c}$.

   (i) Dapatkan suatu taburan bagi X.

   (ii) Jika λ sekarang mengikuti suatu taburan gamma dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian berikut:

$$f(\lambda) = \begin{cases} c^{\alpha+1} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\lambda c} & , \quad \lambda > 0 \\ 0 & , \quad \lambda \leq 0 \end{cases}$$

   di sini c dan α adalah pemalar diketahui. Apakah taburan bagi X?

   (60/100)

2. (a) Katakan $\{X_n\}$, $n \geq 0$ adalah suatu rantai Markov dengan ruang keadaan $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ dan matriks peralihan:

.../2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

(i) Tentukan kelas-kelas berkomunikasi, berikan kalaannya dan tentukan samada ia fana atau jadi semula.

(ii) Hitungkan $f_{66}^{(3)}$.

(30/100)

(b) Gunakan kriterium Aitken untuk menentukan samaada matriks-matriks peralihan, P^n, mempunyai had apabila $n \to \infty$; di sini P adalah diberikan di bawah:

(i) $$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(ii) $$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Jika P^n mempunyai had, carikan had P^n apabila $n \to \infty$.

(30/100)

(c) Katakan $\{X_n\}$, $n \geq 0$ adalah suatu rantai Markov dengan ruang keadaan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan matriks peralihan:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Tunjukkan bahawa rantai Markov tersebut adalah tak terturunkan dan jadi semula tak nol.

(ii) Carikan kalaannya.

.../3

(iii) Bincangkan kelakuan had P^n bila $n \to \infty$.

(40/100)

3. (a) Pelanggan tiba secara rawak ke sebuah kaunter perkhidmatan. Hanya seorang pelanggan sahaja yang mampu dilayan pada satu masa tetapi dua lagi boleh menunggu di sebuah bilik yang dikhaskan pada satu masa yang sama. Jika terdapat lebih daripada tiga pelanggan yang memerlukan perkhidmatan pada masa yang sama maka yang keempat, yang kelima dan seterusnya terpaksa keluar.

Andaikan di dalam suatu selang masa seorang pelanggan akan tiba dengan kebarangkalian q dan pelanggan akan siap dilayan dengan kebarangkalian p. Anggapkan juga bahawa selang masa itu terlalu kecil sehinggakan tidak mungkin lebih daripada seorang pelanggan akan tiba atau seorang pelanggan akan pergi semasa selang ini.

Katakan X_n adalah bilangan pelanggan yang diterima untuk perkhidmatan (termasuk pelanggan yang sedang dilayan).

(i) Terangkan mengapa $\{X_n\}$, $n \geq 0$ adalah suatu rantai Markov.

(ii) Apakah ruang keadaannya.

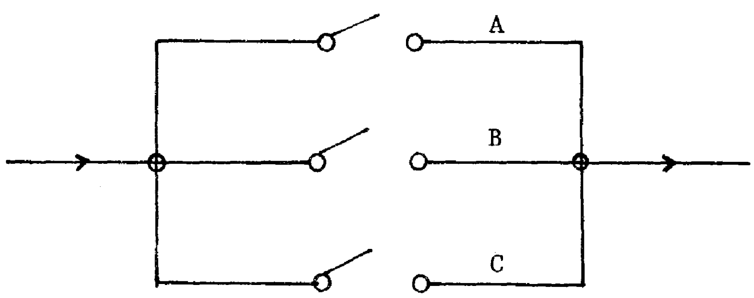
(iii) Dapatkan matriks peralihan bagi rantai Markov ini.

(50/100)

(b) Rajah di bawah menunjukkan satu kelompok yang mengandungi tiga suis yang dipasang selari. Arus elektrik akan mengalir jika sekurang-kurangnya satu suis berfungsi jika diperlukan.

Katakan p adalah kebarangkalian bahawa satu suis akan berfungsi dengan baik pada setiap tahap di dalam proses itu dan $q = 1 - p$ ialah kebarangkalian bahawa suis ini akan gagal berfungsi.

Anggapkan bahawa kesemua suis berfungsi secara tak bersandaran dan jika satu suis gagal berfungsi, ia akan tidak berfungsi selama-lamanya.



.../4

(i) Modelkan proses di atas sebagai satu rantai Markov dengan mengenalpasti ruang-ruang keadaan dan parameternya.

(ii) Dapatkan matriks kebarangkalian peralihan dan kelaskan keadaan-keadaan bagi rantai Markov ini.

(50/100)

4. (a) Zarah-zarah tiba ke alat pengira di dalam suatu proses Poisson dengan parameter λ. Alat pengira ini dibuka hanya pada satu jangkamasa rawak T, iaitu T mempunyai taburan eksponen dengan parameter λ. T juga tak bersandaran dengan ketibaan zarah-zarah tersebut. Dapatkan taburan bagi N, jumlah bilangan zarah yang didaftarkan oleh alat pengira itu.

Petunjuk: Gunakan $\displaystyle\int_0^\infty t^k e^{-t}\, dt = k!$

(40/100)

(b) Suatu populasi individu melahirkan suatu populasi yang baru. Anggapkan bahawa kebarangkalian setiap individu melahirkan k individu baru adalah p_k untuk $k = 0, 1, 2, \ldots,$ dan bilangan individu yang dilahirkan daripada individu yang berlainan adalah pembolehubah rawak yang tak bersandar.

Populasi yang baru membentuk generasi pertama dan keturunannya membentuk generasi kedua dan seterusnya. Bagi $n = 0, 1, \ldots,$ katakan X_n adalah saiz generasi yang ke n dan perhatikan bahawa

$X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} Z_j(n-1)$; di sini $Z_j(n-1)$ adalah bilangan individu di dalam generasi yang ke n yang dilahirkan oleh individu yang ke j di dalam generasi yang ke $(n-1)$.

Andaikan bahawa bilangan anak daripada seorang individu mempunyai min μ dan varians σ^2 iaitu

$$\mu = \sum_{m=0}^{\infty} m p_m$$

dan $$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (m-\mu)^2 p_m.$$

Anggapkan $X_o = 1$.

(i) Tunjukkan bahawa $E(X_n) = \mu^n$

$$\text{dan } \operatorname{Var}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}, & \text{jika } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{jika } \mu = 1. \end{cases}$$

(ii) Dengan menggunakan hasil daripada (i) dapatkan min dan varians bagi saiz populasi daripada generasi yang ke n untuk proses bercabang dengan taburan anak yang berikut:

$$p_o = r \quad p_1 = q, \quad p_2 = p, \quad p + q + r = 1.$$

Berikan juga kebarangkalian kemusnahannya.

(60/100)

5. (a) Katakan $X(t)$ adalah suatu proses lahir-mati dengan $\lambda = \mu$.

Tunjukkan bahawa $P_o(t) = \dfrac{\lambda t}{1 + \lambda t}$

$$\text{dan } P_n(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(1 + \lambda t)^{n+1}}$$

(50/100)

(b) Kebarangkalian bersyarat bagi suatu kelahiran di dalam selang masa $(t, t + \delta t)$ apabila terdapat n ahli di dalam populasi itu pada masa t adalah $(\lambda + \mu n)\delta t + o(\delta t)$ di sini $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

Kebarangkalian bagi kelahiran yang berganda di dalam $(t, t + \delta t)$ adalah $o(\delta t)$ dan tidak terdapat kematian.

Jika pada awalnya tidak terdapat ahli di dalam populasi itu dapatkan fungsi kebarangkalian bagi bilangan ahli populasi tersebut pada masa t.

Dapatkan juga min dan varians bagi taburan ini.

(50/100)

- oooOOooo -