UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1988/89

Jun 1989

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Masa: 3 Jam

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ suatu sampel rawak dari taburan dengan f.k.k.

$$f(x) = x^{-2}\, I_{(1,\infty)}(x) .$$

Biarkan $Y = \min [X_1,\ldots,X_n]$. Dapatkan $E[Y]$.

(30/100)

(b) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ pembolehubah rawak tak bersandar dari taburan Poisson yang sama dengan min λ, dan biarkan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

(i) Dapatkan $E[S_n]$ dan $\mathrm{Var}[S_n]$.

(ii) Jika $n = 100$ dan $\lambda = 4$, anggarkan $P(S_{100} > 440)$. Nyatakan teorem yang membolehkan anda membuat anggaran tersebut.

(35/100)

(c) Biarkan $\bar{X}_n$ dan S_n^2 masing-masingnya menandakan min dan varians suatu sampel rawak saiz n dari taburan $N(\mu,\sigma^2)$.

(i) Buktikan bahawa $nS_n^2/(n-1)$ menumpu secara stokastik kepada σ^2.

(ii) Takrifkan statistik T_n sebagai

$$T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{S_n^2 / (n-1)}} .$$

.../2

Dengan menggunakan teorem-teorem mengenai taburan penghad, tunjukkan bahawa taburan penghad bagi T_n ialah $N(0, 1)$.

(35/100)

2. (a) Andaikan X suatu cerapan tunggal dari taburan $N(0,\theta)$.

   (i) Adakah X statistik cukup?

   (ii) Adakah $|X|$ statistik cukup?

   (iii) Adakah X^2 penganggar saksama bagi θ?

(30/100)

   (b) Biarkan $X_1,\ldots,X_n$ mewakili suatu sampel rawak dari taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\,\theta) = \theta\, x^{-2}\, I_{[\theta\ \infty)}(x),\ \theta > 0.$$

   (i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

   (ii) Adakah $Y_1 = \min[X_1,\ldots,X_n]$ suatu statistik cukup?

   (iii) Adakah Y_1 penganggar saksama bagi θ?

(30/100)

   (c) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ suatu sampel rawak saiz n, $n > 1$, dari taburan seragam dengan f.k.k.

$$f(x;\,\theta) = \frac{1}{\theta}\, I_{[0,\theta]}(x),\quad \theta > 0\ .$$

   (i) Cari penganggar kaedah - momen bagi θ. Namakannya T_1. Cari jangkaan T_1.

   (ii) Cari p.k.m. bagi θ. Terbitkan suatu panganggar saksama bagi θ sebagai fungsi p.k.m. di atas dan namakan penganggar ini T_2.

   (iii) Di antara T_1 dan T_2, yang manakah anda akan guna sebagai penganggar bagi θ? Beri sebab.

(40/100)

Petunjuk: Jika $X \sim$ seragam (a,b), $E[X] = \frac{a+b}{2}$ dan $\mathrm{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$] .

.../3

3. (a) Nyatakan Teorem Lehmann-Scheffé.

(20/100)

(b) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ suatu sampel rawak dari taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\ \theta) = \theta\ x^{\theta-1}\ I_{(0,1)}(x), \quad \theta > 0.$$

(i) Cari statistik cukup dan lengkap.

(ii) Gunakan Teorem Lehmann-Scheffé bagi mendapatkan penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi satu fungsi θ.

(iii) Dapatkan batas bawah Rao-Cramer (B.B.R.C.) bagi varians penganggar saksama θ dan $1/\theta$.

(40/100)

(c) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ suatu sampel rawak saiz n dari taburan $N(\theta,\ 1)$.

(i) Cari B.B.R.C. bagi varians penganggar-penganggar saksama bagi θ dan θ^2

(ii) Dapatkan penganggar saksama bagi θ sebagai suatu fungsi statistik cukup dan lengkap. Sahkan bahawa penganggar ini ialah PSVMS bagi θ dengan menunjukkan variansnya mencapai BBRC bagi varians penganggar-penganggar saksama bagi θ.

(iii) Adakah terdapat penganggar saksama bagi θ^2? Jika ada, cari penganggar ini.

(40/100)

4. (a) Andaikan $X_1,\ldots,X_n$ suatu sampel rawak saiz 9 dari taburan $N(\mu,\ \sigma^2)$.

(i) Jika σ diketahui, dapatkan panjang selang keyakinan 95% bagi μ.

(ii) Jika σ tidak diketahui, dapatkan panjang selang keyakinan 95% bagi μ

(30/100)

.../4

(b) Jika $X_1,\ldots,X_n$ menandakan satu sampel rawak saiz 25 dari taburan $N(\theta, 100)$, dapatkan rantau genting paling berkuasa secara seragam saiz $\alpha = 0.10$ bagi menguji $H_0 : \theta = 75$ melawan $H_1 : \theta > 75$.

(30/100)

(c) Andaikan X mempunyai taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) .$$

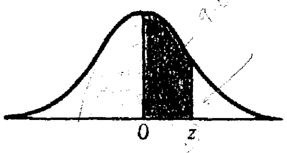
(i) Kita menguji hipotesis ringkas $H_0 : \theta = \frac{1}{4}$ melawan hipotesis gubahan $H_1 : \theta < \frac{1}{4}$ dengan mengambil satu sampel rawak saiz 10 dan menolak H_0 jika dan hanya jika $\sum_{1}^{10} x_i \leqslant 1$. Cari fungsi kuasa $K(\theta)$, $0 < \theta \leqslant \frac{1}{4}$, bagi ujian ini.

(ii) Andaikan $H_0 : \theta = \frac{1}{20}$ dan $H_1 : \theta > \frac{1}{20}$. Gunakan teorem had memusat bagi menentukan saiz sampel n suatu sampel rawak supaya ujian paling berkuasa secara seragam bagi menguji H_0 melawan H_1 mempunyai fungsi kuasa $K(\theta)$ dengan $K(1/20) \doteq 0.05$ dan $K(1/20) \doteq 0.90$.

(40/100)

- ooo00ooo -

TABLE 3 Normal Curve Areas

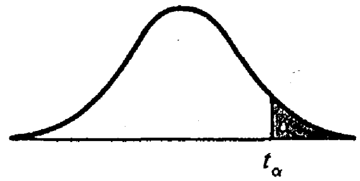


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

This table is abridged from Table I of *Statistical Tables and Formulas*, by A. Hald (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1952). Reproduced by permission of A. Hald and the publishers, John Wiley & Sons, Inc.

TABLES

TABLE 4 Critical Values of t



$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$	d.f.
3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

From "Table of Percentage Points of the t-Distribution." Computed by Maxine Merrington, *Biometrika*, Vol. 32 (1941), p. 300. Reproduced by permission of Professor E. S. Pearson.