UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1986/87

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Tarikh: 24 Jun 1987 Masa: 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua pembolehubah rawak tak bersandar daripada taburan $N(\mu, 1)$, iaitu

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$
$$\infty < \mu < \infty .$$

(i) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi $Y = X_1 + X_2$ dan $Z = X_1 + 2X_2$.

(ii) Tunjukkan bahawa statistik $Y = X_1 + X_2$ merupakan suatu statistik cukup bagi μ.

(iii) Tunjukkan bahawa fungsi ketumpatan kebarangkalian bersyarat bagi Z jika diberikan Y, tidak bergantung pada μ.

(50/100)

(b) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel daripada taburan eksponen dengan min $1/\theta$, iaitu

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta}, \quad x > 0, \ \theta > 0.$$

Berdasarkan pada sampel rawak bersaiz n ini, seorang pengujikaji ingin menganggar penengah bagi n cerapan ini.

(i) Dapatkan suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (UMVUE) bagi penengah ini.

[Petunjuk: Dapatkan penengah, $M = M(\theta)$, bagi taburan ini dengan menggunakan takrif bagi penengah, iaitu $P(X \leq M) = P(X > M) = \frac{1}{2}$].

(ii) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi penengah ini.

(50/100)

2. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak dariapda suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x;\, \theta) = e^{-(x-\theta)}, \quad \theta < x < \infty \quad \text{bagi} \quad -\infty < \theta < \infty.$$

(i) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(ii) Dapatkan suatu penganggar bagi θ dengan menggunakan kaedah momen.

(iii) Tunjukkan bahawa statistik $T = X_{(1)}$ merupakan suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi θ. $X_{(1)}$ menandakan statistik tertib yang pertama, iaitu $X_{(1)} = \text{minimum}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

(40/100)

(b) Andaikan $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$ sebagai suatu statistik tertib bagi suatu sampel rawak daripada taburan seragam $[0, \theta]$. Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi $T = X_{(n)}$ ialah

$$f(t;\, \theta) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0 < t < \theta\ .$$

(i) Tunjukkan yang $T = X_{(n)}$ adalah suatu penganggar konsisten bagi θ.

(ii) Dapatkan suatu penganggar saksama bagi θ berdasarkan pada statistik $X_{(n)}$ ini. Hitung min ralat kuasa dua bagi penganggar ini.

(iii) Dapatkan suatu penganggar saksama bagi θ berdasarkan pada semua $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Hitung min ralat kuasa dua bagi penganggar ini.

(iv) Apakah kesimpulan yang boleh dibuat mengenai kedua-dua penganggar bagi θ di bahagian (ii) dan (iii)?

(60/100)

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak daripada suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian seperti berikut:

$$f(x;\, \theta) = \frac{1}{6\theta^4}\, x^3\, e^{-x/\theta}, \quad 0 < x < \infty,\ 0 < \theta < \infty\ .$$

(i) Dapatkan suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi θ.

(ii) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(iii) Adakah penganggar kebolehjadian maksimum ini juga suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (UMVUE) bagi θ?

(iv) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi varians penganggar saksama bagi θ ini.

(v) Statistik saksama T bagi parameter θ dikatakan suatu statistik cekap bagi θ jika dan hanya jika varians bagi T mencapai batas bawah Cramer-Rao. Tunjukkan bahawa penganggar kebolehjadian maksimum di bahagian (ii) ialah suatu penganggar cekap bagi θ.

[Petunjuk: Katakan X adalah suatu pembolehubah rawak bagi taburan Gammma. F.k.k. bagi X ialah

$$f(x;\, r,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)} \lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad 0 < x < \infty,\ r > 0,\ \lambda > 0.$$

Min bagi X ialah $\frac{r}{\lambda}$ dan varians bagi X ialah $\frac{r}{\lambda^2}$]

(70/100)

(b) Jika T adalah suatu statistik tidak negatif dengan $E[T] = \theta$, tunjukkan yang $E[T^{\frac{1}{2}}] \leqslant \theta^{\frac{1}{2}}$.

(15/100)

(c) Andaikan X tertabur secara Poisson dengan min θ, $\theta > 0$. Dapatkan suatu penganggar saksama bagi $e^{2\theta}$.

(15/100)

4. (a) Andaikan X suatu cerapan daripada taburan seragam di dalam julat $[0, \theta]$.

(i) Dapatkan satu selang keyakinan 90% bagi θ.

(ii) Apakah pekali keyakinan bagi selang (1.05X, 2X) untuk θ?

(25/100)

(b) Andaikan X_1, X_2 sebagai dua cerapan rawak tak bersandar daripada taburan eksponen yang fungsi ketumpatannya diberikan seperti

$$f(x;\ \theta) = \theta e^{-\theta x}\ ,\quad x > 0.$$

(i) Dapatkan satu selang keyakinan 90% bagi θ dengan berdasarkan statistik $y_2 - y_1$, jika y_i menandakan statistik tertib ke-i.

(ii) Berikan had atas dan had bawah selang keyakinan ini jika $y_2 = 5{\cdot}3$ dan $y_1 = 3{\cdot}7$.

(50/100)

(c) Jika $\bar{X}$ menandakan min bagi suatu sampel rawak daripada taburan $N(\mu,\ 10)$, cari n supaya kebarangkalian selang $(\bar{X} - \frac{1}{2},\ \bar{X} + \frac{1}{2})$ mengandungi μ hampir 0.95.

(25/100)

5. (a) Andaikan X_1, X_2 tertabur secara secaman dan tak bersandar dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x;\ \theta) = \theta x^{\theta-1},\quad 0 < x < 1.$$

Untuk menguji $H_0 : \theta = 1$ melawan $H_a : \theta = 2$, H_0 akan ditolak jika $\frac{3}{4} X_1 < X_2$. Hitung kebarangkalian ralat jenis I dan ralat jenis II.

(40/100)

(b) Dua jenis kuman A dan B mempunyai hayat X minggu yang boleh diperihalkan oleh fungsi ketumpatan kebarangkalian, $f(x)$, dengan

$$f(x) = xe^{-x} \quad \text{bagi jenis A}$$

dan $$f(x) = 3xe^{-3x} \quad \text{bagi jenis B.}$$

Seorang penyelidik perubatan menemui kuman yang dipercayai daripada jenis A atau B. Untuk menentukan jenisnya, hayat kuman itu telah diukur.

(i) Apakah hipotesis yang patut diuji untuk menentukan jenis kuman itu?

(ii) Tunjukkan yang rantau genting paling berkuasa bagi ujian ini berbentuk $x < c$, jika x ialah hayat kuman itu, sementara c ialah suatu pemalar.

(iii) Tunjukkan cara untuk menghitung nilai c jika aras pengertian yang diingini ialah α. (Berikan persamaan yang menghubungkan α dan c).

(iv) Jika hayat kuman itu didapati 0.3 minggu, bolehkah kita katakan yang kuman itu daripada jenis B dengan aras pengertian 0.05?

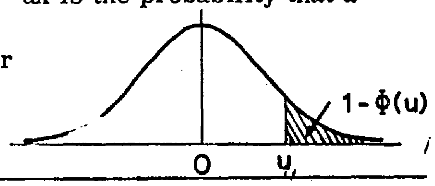
(60/100)

- ooOoo -

Table 3

AREAS IN TAIL OF THE NORMAL DISTRIBUTION

The function tabulated is $1 - \Phi(u)$ where $\Phi(u)$ is the cumulative distribution function of a standardised Normal variable u. Thus $1 - \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-x^2/2}\,dx$ is the probability that a standardised Normal variable selected at random will be greater than a value of u $\left(= \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

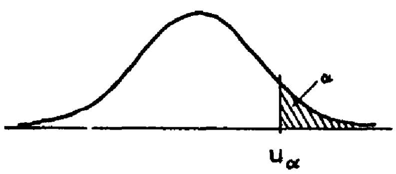


$\frac{(x-\mu)}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
3.0	.00135									
3.1	.00097									
3.2	.00069									
3.3	.00048									
3.4	.00034									
3.5	.00023									
3.6	.00016									
3.7	.00011									
3.8	.00007									
3.9	.00005									
4.0	.00003									

Table 4

PERCENTAGE POINTS OF THE NORMAL DISTRIBUTION

The table gives the 100α percentage points, u_α, of a standardised Normal distribution where $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$. Thus u_α is the value of a standardised Normal variate which has probability α of being exceeded.



α	u_α	α	u_α	α	u_α	α	u_α	α	u_α	α	u_α
.50	0.0000	.050	1.6449	.030	1.8808	.020	2.0537	.010	2.3263	.050	1.6449
.45	0.1257	.048	1.6646	.029	1.8957	.019	2.0749	.009	2.3656	.010	2.3263
.40	0.2533	.046	1.6849	.028	1.9110	.018	2.0969	.008	2.4089	.001	3.0902
.35	0.3853	.044	1.7060	.027	1.9268	.017	2.1201	.007	2.4573	.0001	3.7190
.30	0.5244	.042	1.7279	.026	1.9431	.016	2.1444	.006	2.5121	.00001	4.2649
.25	0.6745	.040	1.7507	.025	1.9600	.015	2.1701	.005	2.5758	.025	1.9600
.20	0.8416	.038	1.7744	.024	1.9774	.014	2.1973	.004	2.6521	.005	2.5758
.15	1.0364	.036	1.7991	.023	1.9954	.013	2.2262	.003	2.7478	.0005	3.2905
.10	1.2816	.034	1.8250	.022	2.0141	.012	2.2571	.002	2.8782	.00005	3.8906
.05	1.6449	.032	1.8522	.021	2.0335	.011	2.2904	.001	3.0902	.000005	4.4172

Table 5

ORDINATES OF THE NORMAL DISTRIBUTION

The table gives $\phi(u)$ for values of the standardised Normal variate, u, in the interval 0.0(0.1)4.0 where $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$

u	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0.0	.3989	.3970	.3910	.3814	.3683	.3521	.3332	.3123	.2897	.2661
1.0	.2420	.2179	.1942	.1714	.1497	.1295	.1109	.0940	.0790	.0656
2.0	.0540	.0440	.0355	.0283	.0224	.0175	.0136	.0104	.0079	.0060
3.0	.0044	.0033	.0024	.0017	.0012	.0009	.0006	.0004	.0003	.0002
4.0	.0001									