

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Tarikh: 8 April 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari
(3 Jam)

Jawab LIMA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Katakan $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ merupakan statistik tertib daripada suatu taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi $X_{(n)}$ dan $X_{(1)}$.

- (ii) Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi

$$R = X_{(n)} - X_{(1)} \text{ dan } T = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}.$$

- (iii) R dipanggil julat sampel dan T dipanggil tengah julat sampel. Dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi julat sampel dan tengah julat sampel.

(80/100)

- (b) Katakan $X_1, \dots, X_n$ adalah pembolehubah rawak tak bersandar dengan X_i bertaburan eksponen dengan parameter λ_i , iaitu

$$f(x_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i x_i}$$

Tunjukkan yang $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ bertaburan eksponen dengan parameter $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

(20/100)

(MAT361)

2. (a) Katakan $X_1, \dots, X_n$ adalah pembolehubah rawak yang tertabur secara seragam dan tak bersandar dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x; \theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < \theta < 1.$$

- (i) Dapatkan suatu penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ .
- (ii) Tunjukkan yang $T = \sum_{i=1}^n X_i$ adalah suatu statistik cukup dengan menggunakan Kriteria Fisher-Neyman.
- (iii) Dapatkan suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (UMVUE) bagi varians T , iaitu $n\theta(1-\theta)$.

(65/100)

- (b) Apakah yang dimaksudkan dengan penganggar saksama dan penganggar konsisten?
Adakah penganggar di dalam a(i) **saksama** dan konsisten?

(35/100)

3. (a) Nyatakan teorem Rao-Blackwell dan berikan buktinya.

(30/100)

- (b) Katakan X dan Y adalah dua pembolehubah rawak yang mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum

$$f(x, y; \theta) = \frac{2}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}(x+y)} \quad 0 < x, y < \infty$$

- (i) Tunjukkan bahawa min dan varians bagi Y ialah $\frac{3\theta}{2}$ dan $\frac{5\theta^2}{4}$.
- (ii) Tunjukkan bahawa $E[Y \mid X = x] = x + \theta$.
- (iii) Mengikut teorem Rao-Blackwell, jangkaan bagi $X + \theta$ ialah $\frac{3\theta}{2}$ dan varians bagi $X + \theta$ adalah kurang daripada varians Y . Dapatkan varians bagi $X + \theta$.

(50/100)

(MAT361)

- (c) Katakan T_n adalah suatu statistik yang mempunyai
had $E[T_n] = \theta$ dan $\text{had}_{n \rightarrow \infty} \sigma_{T_n}^2 = 0$. Buktikan bahawa T_n
adalah suatu statistik konsisten bagi θ .

(20/100)

4. (a) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak
bersaiz $n > 2$, daripada suatu taburan dengan fungsi
ketumpatan kebarangkalian

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

- (i) Tunjukkan yang $T = \sum_{i=1}^n \ln X_i$ adalah suatu
statistik cukup dan lengkap bagi θ .
- (ii) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi statistik
ini.
- (iii) Dapatkan suatu penganggar saksama bervarians
minimum secara seragam (UMVUE) bagi θ .
Adakah panganggar ini mencapai batas bawah
Cramer-Rao?

[Petunjuk: Gunakan transformasi $Y_i = \ln X_i$]

(65/100)

- (b) Katakan $X_1, X_2, \dots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak
daripada taburan normal yang mempunyai

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Tunjukkan yang $T = \sum_{i=1}^n X_i$ adalah suatu statistik cukup
bagi θ . Dapatkan suatu fungsi bagi T yang merupakan
suatu penganggar saksama bagi θ . Adakah fungsi ini juga
suatu statistik cukup bagi θ ? Berikan alasannya.

(35/100)

(MAT361)

5. (a) Katakan X_1 ialah suatu cerapan daripada taburan normal $N(\mu, 9)$.

- (i) Dapatkan selang keyakinan 95% bagi μ dengan berdasarkan X_1 .
- (ii) Jika suatu lagi cerapan tak bersandar, X_2 diperolehi daripada taburan ini, apakah pekali keyakinan bagi selang (Y_1, Y_2) dengan Y_i sebagai statistik tertib ke- i ?

(35/100)

- (b) (i) Suatu sampel rawak bersaiz $n = 6$ diperolehi daripada populasi normal $N(\mu, \sigma^2)$. Dapatkan selang keyakinan 90% bagi σ^2 jika $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 = 40$.
- (ii) Katakan tiga sampel rawak tambahan diperolehi daripada 3 populasi normal lain yang tak bersandar, tetapi dengan varians yang sama (iaitu σ^2). Andaikan $S^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$ dan n bagi sampel-sampel ini adalah seperti berikut:

n	4	3	7
S^2	30	20	42

Dengan berdasarkan empat sampel ini, berikan selang keyakinan 90% bagi σ^2 . Bandingkan panjang selang keyakinan ini dengan selang yang diperolehi di dalam b(i). Jelaskan mengapa kesudahan ini berlaku.

[Petunjuk: Hasil tambah pembolehubah-pembolehubah rawak bertaburan χ^2 adalah χ^2 juga dengan darjah kebebasan yang sama dengan hasil tambah semua darjah kebebasan]

(45/100)

- (c) Jika X suatu cerapan daripada suatu taburan yang fungsi ketumpatan kebarangkaliannya ialah

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x} \quad 0 < x < \infty; \quad \theta > 0$$

- (i) Berikan kuantiti pangsi yang boleh digunakan untuk menghasilkan selang keyakinan bagi θ .

(MAT361)

- (ii) Gunakan kuantiti pangsi itu untuk mendapatkan suatu selang keyakinan 90% bagi θ .

(15/100)

6. (a) Andaikan X_1, X_2, X_3 suatu sampel rawak daripada taburan yang fungsi ketumpatan kebarangkaliannya ialah

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \quad 0 < x < \theta; \quad \theta > 0$$

Andaikan Y_1, Y_2, Y_3 sebagai statistik tertib yang berkaitan. Ujian untuk $H_0: \theta = 1$ melawan $H_1: \theta \neq 1$ akan menolak H_0 jika $y_3 \leq \frac{1}{2}$ atau $y_3 \geq 1$.

- (i) Cari fungsi kuasa $K(\theta)$ bagi ujian ini.
(ii) Apakah aras keertian ujian ini?
(iii) Tunjukkan yang rantau genting ujian ini bukan suatu rantau genting yang paling berkuasa secara seragam.

(55/100)

- (b) Seorang penyelidik di MARDI menemui sejenis kacukan padi yang dipercayai akan mendatangkan hasil yang lebih daripada padi biasa. Pada puratanya, padi biasa menghasilkan 80 tan seekar. Anggapkan hasil-hasil padi seekar bertaburan normal dengan sisihan piawai 5 tan. Jika μ ialah min bagi hasil kacukan baru, penyelidik ingin menguji $H_0: \mu = 80$ dan $H_1: \mu > 80$.

- (i) Terbitkan rantau genting paling berkuasa secara seragam untuk menguji hipotesis ini.
(ii) Sekiranya aras keertian yang diinginkan ialah $\alpha = 0.05$ dan $n = 10$, apakah bentuk tepat rantau genting ini?
(iii) Jika $X_1, \dots, X_{10}$ adalah hasil daripada 10 ekar berlainan yang ditanam dengan kacukan baru ini, menghasilkan $\sum X_i = 850$, apakah kesimpulan yang boleh dibuat.

(45/100)

(MAT361)

7. (a) Andaikan X suatu cerapan daripada taburan eksponen yang fungsi ketumpatannya diberikan seperti

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x} \quad 0 < x < \infty \\ \theta > 0.$$

dan kita berminat untuk menguji $H_0 : \theta = 0.05$ melawan $H_1 : \theta = 0.01$, dengan berdasarkan X .

- (i) Tunjukkan yang ujian paling berkuasa menetapkan rantau genting seperti

$$G : \{x; x \geq c\}.$$

- (ii) Jika $c = 40$, berikan kebarangkalian melakukan ralat jenis I dan kebarangkalian melakukan ralat jenis II.
- (iii) Jika aras keertian ialah $\alpha = 0.05$, apakah nilai c ?
- (iv) Adakah rantau genting seperti di dalam (i), suatu rantau genting paling berkuasa secara seragam untuk menguji $H_0 : \theta = 0.05$ melawan $H_1 : \theta < 0.05$?

(60/100)

- (b) Untuk mengurangkan kos panggilan telefon ke luar kampus, USM telah mengenakan syarat baru. Untuk menguji kekesan syarat ini, jumlah panggilan selama 10 hari telah dicatatkan. Jumlah ini ditandakan dengan Y . Sebelum syarat ini dikenakan, panggilan telefon ke luar kampus berlaku dengan kadar 20 panggilan sehari.

- (i) Berikan hipotesis nol dan alternatif yang sesuai.
- (ii) Dapatkan bentuk rantau genting yang berdasarkan Y , dengan menggunakan nisbah kebolehjadian.
- (iii) Dengan menggunakan penghampiran normal bagi Poisson, berikan fungsi kuasa dan saiz rantau genting yang diberikan di dalam b(ii).

[Petunjuk: Bilangan panggilan telefon bertaburan Poisson].

(40/100)

Table 2 CUMULATIVE NORMAL DISTRIBUTION

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

x	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(x)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1 - \Phi(x)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

Table 3 CUMULATIVE CHI-SQUARE DISTRIBUTION*

$$F(u) = \int_0^u \frac{x^{(n-2)/2} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} dx$$

$n \backslash F$	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	.0*393	.0*157	.0*982	.0*393	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

* This table is abridged from "Tables of percentage points of the incomplete beta function and of the chi-square distribution," *Biometrika*, Vol. 32 (1941). It is here published with the kind permission of its author, Catherine M. Thompson, and the editor of *Biometrika*.

Table 4 CUMULATIVE F DISTRIBUTION* (m degrees of freedom in numerator; n in denominator)

$$G(F) = \int_0^F \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2} x^{(m-2)/2} (n+mx)^{-(m+n)/2} dx}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

G	n	m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	60	120	∞
.90	1		39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.7	61.2	61.7	62.3	62.8	63.1	63.3
.95			161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	252	253	254
.975			648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	1000	1010	1010	1020
.99			4,050	5,000	5,400	5,620	5,760	5,860	5,930	5,980	6,020	6,060	6,110	6,160	6,210	6,260	6,310	6,340	6,370
.995			16,200	20,000	21,600	22,500	23,100	23,400	23,700	23,900	24,100	24,200	24,400	24,600	24,800	25,000	25,200	25,400	25,500
.90	2		8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.46	9.47	9.48	9.49
.95			18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
.975			38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5
.99			98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5
.995			199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199
.90	3		5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.15	5.14	5.13
.95			10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.57	8.55	8.53
.975			17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.2	14.1	14.0	13.9	13.9	13.9
.99			34.1	30.8	29.5	28.7	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.3	26.2	26.1	26.1
.995			55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.5	42.1	42.0	41.8
.90	4		4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.93	3.92	3.90	3.87	3.84	3.82	3.79	3.78	3.76
.95			7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.69	5.66	5.63
.975			12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.36	8.31	8.26
.99			21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.6	13.5
.995			31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	19.9	19.6	19.5	19.3
.90	5		4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.17	3.14	3.12	3.11
.95			6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.43	4.40	4.37
.975			10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.12	6.07	6.02
.99			16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.20	9.11	9.02
.995			22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.7	12.4	12.3	12.1
.90	6		3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.80	2.76	2.74	2.72
.95			5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.74	3.70	3.67
.975			8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	4.96	4.90	4.85
.99			13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.06	6.97	6.88
.995			18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.0	9.81	9.59	9.36	9.12	9.00	8.88
.90	7		3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.56	2.51	2.49	2.47
.95			5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.30	3.27	3.23
.975			8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.25	4.20	4.14
.99			12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.82	5.74	5.65
.995			16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.53	7.31	7.19	7.08
.90	8		3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.29
.95			5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.01	2.97	2.93
.975			7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.89	3.78	3.73	3.67
.99			11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.03	4.95	4.86
.995			14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.40	6.18	6.06	5.95

.90		3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	2.18	2.16
.95		5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.79	2.75	2.71
.975	9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.45	3.39	3.33
.99		10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.48	4.40	4.31
.995		13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.62	5.41	5.30	5.19
.90		3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.15	2.11	2.08	2.06
.95		4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.84	2.77	2.70	2.62	2.58	2.54
.975	10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.20	3.14	3.08
.99		10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.08	4.00	3.91
.995		12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.07	4.86	4.75	4.64
.90		3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	1.93	1.90
.95		4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.38	2.34	2.30
.975	12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.85	2.79	2.72
.99		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.54	3.45	3.36
.995		11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.33	4.12	4.01	3.90
.90		3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.87	1.82	1.79	1.76
.95		4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.16	2.11	2.07
.975	15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.52	2.46	2.40
.99		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.05	2.96	2.87
.995		10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.69	3.48	3.37	3.26
.90		2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.64	1.61
.95		4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.95	1.90	1.84
.975	20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.22	2.16	2.09
.99		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.61	2.52	2.42
.995		9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.12	2.92	2.81	2.69
.90		2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.61	1.54	1.50	1.46
.95		4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.74	1.68	1.62
.975	30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	1.94	1.87	1.79
.99		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.21	2.11	2.01
.995		9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.63	2.42	2.30	2.18
.90		2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.48	1.40	1.35	1.29
.95		4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.53	1.47	1.39
.975	60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.67	1.58	1.48
.99		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.84	1.73	1.60
.995		8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.19	1.96	1.83	1.69
.90		2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.54	1.48	1.41	1.32	1.26	1.19
.95		3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.43	1.35	1.25
.975	120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.53	1.43	1.31
.99		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.66	1.53	1.38
.995		8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	1.98	1.75	1.61	1.43
.90		2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.34	1.24	1.17	1.00
.95		3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.32	1.22	1.00
.975	∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.39	1.27	1.00
.99		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.47	1.32	1.00
.995		7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.79	1.53	1.36	1.00

* This table is abridged from "Tables of percentage points of the inverted beta distribution," *Biometrika*, Vol. 33 (1943). It is here published with the kind permission of its authors, Maxine Merrington and Catherine M. Thompson, and the editor of *Biometrika*.

Table 5 CUMULATIVE STUDENT'S *t* DISTRIBUTION*

$$F(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} dx$$

$\begin{matrix} F \\ n \end{matrix}$	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

* This table is abridged from the "Statistical Tables" of R. A. Fisher and Frank Yates published by Oliver & Boyd, Ltd., Edinburgh and London, 1938. It is here published with the kind permission of the authors and their publishers.