UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT 361 - PENTAABIRAN STATISTIK

Masa : 3 jam

Jawab semua soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia. MULAKAN setiap soalan pada halaman yang baru.

1. (a) Katakan X_1, X_2 adalah pembolehubah-pembolehubah rawak tak bersandar dengan f.k.k. sepunya berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Katakan $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$.

(i) Cari f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2.

(ii) Cari f.k.k. sut bagi Y_1.

(iii) Cari f.k.k. sut bagi Y_2.

(50/100)

(b) Katakan X_1, X_2, ..., X_n adalah p.r. tak bersandar dengan X_i mempunyai taburan Poisson dengan parameter λ_i, i = 1, 2, ..., n, di mana $\lambda_i > 0$. Katakan $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(i) Dapatkan f.k.k. bagi T.

(ii) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi X_1 diberikan T.

(50/100)

.../2

2. (a) Takrifkan sebutan-sebutan berikut :

   (i) statistik cukup

   (ii) kelengkapan bagi suatu famili taburan.

   Terangkan dengan teliti bagaimana konsep-konsep di atas digunakan dalam penerbitan penganggar-penganggar baik. Illustrasikan jawapan anda dengan menyatakan teorem-teorem berguna dan berikan contoh-contoh pada tempat-tempat yang sesuai.

(50/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah suatu sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

   (i) Tunjukkan bahawa $T = X_1 + X_2 + ... + X_n$ adalah suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi θ.

   (ii) Katakan $U(X_1) = \begin{cases} 0 \text{ jika } X_1 < k, \\ 1 \text{ jika } X_1 \geq k, \end{cases}$

   di mana k ialah suatu pemalar yang diketahui.

   Tunjukkan bahawa $U(X_1)$ ialah suatu penganggar yang saksama bagi $e^{-k\theta}$.

   (iii) Demikian, tunjukkan bahawa penganggar saksama bervarians minimun secara seragam bagi $e^{-k\theta}$ diberi oleh

$$g(T) = \begin{cases} \left(\dfrac{T - k}{T}\right)^{n-1} & \text{apabila } T \geq k \\ 0 & \text{apabila } T < k \end{cases}$$

(50/100)

.../3

3. (a) Andaikan $X_1, X_2, ..., X_n$ suatu sampel rawak saiz n daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta(1+x)^{-(1+\theta)}, & 0 < x < \infty, \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Cari suatu statistik yang cukup dan lengkap bagi θ.

(ii) Cari suatu penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi $1/\theta$.

(iii) Cari suatu PSVMS bagi θ.

(iv) Cari batas bawah Cramer - Rao bagi varians penganggar-penganggar saksama $1/\theta$.

[Petua : Dapatkan taburan bagi $Y = \ell n\ (1 + x)$]

(50/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel rawak daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta,\beta) = (2\beta)^{-1} \exp\{-|x-\theta|/\beta\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad \beta > 0.$$

(i) Cari penganggar kebolehjadian maksimum (PKM) bagi (θ, β).

(ii) Cari PKM bagi $P_{\theta,\beta}\{X_1 - \theta \geq 1\}$.

(50/100)

.../4

4. (a) Katakan X_1, X_2, ..., X_n sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (1/\theta)e^{-x/\theta} & , 0 < x < \infty, \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Huraikan bagaimanakah anda akan memperolehi suatu selang keyakinan 95% bagi θ.

(ii) Jika n = 30, terbitkan suatu selang keyakinan hampiran 95% bagi θ.

(40/100)

(b) Nyatakan lema asasi Neyman - Pearson.
Suatu sampel yang terdiri daripada n cerapan tak bersandar diambil daripada suatu taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Cari rantau genting yang paling berkuasa secara seragam untuk menguji hipotesis $H_0 : \theta = \theta_0$ lawan $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$.

Jika n = 10 dan $\theta_0 = 0.5$, tentukan secara tepatnya rantau genting berpadan dengan suatu ujian saiz 0.05.

(60/100)

5. (a) Katakan X_1 dan X_2 sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta}, & 0 < x < 1, \theta \geq 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

.../5

Untuk menguji $H_o : \theta = 2$ lawan $H_1 : \theta = 1$, ujian berikut digunakan :

$$\text{Tolak } H_o \text{ jika } X_1X_2 \le \frac{3}{5}.$$

Cari saiz dan kuasa bagi ujian ini.

(40/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel rawak daripada taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Cari ujian nisbah kebolehjadian untuk menguji $H_o : \lambda \le \lambda_o$ lawan $H_1 : \lambda > \lambda_o$.

(30/100)

(c) Huraikan konsep-konsep yang berkaitan di dalam teori pengujian hipotesis.

(30/100)

- ooo000ooc

Taburan	*Fungsi Ketumpatan* f	*Min* $\mu = E[X]$	*Varians* $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$	*Fungsi penjana Momen*
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\dots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$	np	npq	$(q+pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = p q^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\dots\}}(x)$	λ	λ	$\exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$\exp\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \ t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \ t < \lambda$
Khi kuasa dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \ t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	—