UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1987/88

MAT361 - Pentaabiran Statistik

Tarikh: 23 Jun 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Katakan X dan Y adalah dua pembolehubah rawak tak bersandar di mana $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

   (i) Dapatkan taburan bagi $X - Y$.

   (ii) Jika $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 3$ dan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$, cari $P(X > Y + 1)$.

   (40/100)

   (b) Andaikan X sebagai suatu pembolehubah rawak dengan f.k.k.

   $$f(x) = 2xe^{-x^2} I_{(0,\infty)}(x)$$

   (i) Dapatkan f.k.k. bagi $Y = X^2$.

   (ii) Cari $E(Y)$ dan $Var(Y)$.

   (40/100)

   (c) Katakan $\bar{X}_n$ menandakan min bagi suatu sampel rawak saiz n dari satu taburan normal dengan min μ dan varians σ^2. Cari taburan penghad bagi $\bar{X}_n$.

   (20/100)

2. (a) Andaikan $Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_5$ menandakan statistik tertib bagi satu sampel rawak saiz 5 dari taburan seragam di atas selang (0, 1).

   (i) Dapatkan f.k.k. bagi Y_1.

   (ii) Tunjukkan bahawa $E(Y_1) = \frac{1}{6}$.

.../2

(iii) Dapatkan f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_5.

(iv) Cari kebarangkalian bahawa julat bagi sampel melebihi $\frac{1}{2}$.

(50/100)

(b) Nyatakan Teorem Pemfaktoran.

(10/100)

(c) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandakan suatu sampel rawak dari taburan dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta]}(x), \quad 0 < \theta < \infty .$$

(i) Tunjukkan bahawa $Y_n = \text{maks}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ adalah statistik cukup bagi θ dengan menggunakan teorem dalam (b).

(ii) Tunjukkan bahawa Y_n adalah penganggar tak saksama bagi θ.

(iii) Dapatkan satu penganggar saksama bagi θ sebagai satu fungsi Y_n.

(iv) Dapatkan satu lagi penganggar saksama bagi θ berdasarkan kepada semua $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan bukan suatu fungsi Y_n.

(40/100)

3. (a) Nyatakan Teorem Rao-Blackwell.

(10/100)

(b) Biarkan X_1 dan X_2 sebagai suatu sampel rawak saiz 2 dari taburan yang mempunyai f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & 0 < x < \infty, \quad \theta > 0. \\ 0, & \text{d.}\ell.\ell.\text{t.} \end{cases}$$

(i) Dapatkan f.k.k. tercantum bagi statistik cukup $Y_1 = X_1 + X_2$ bagi θ dan statistik $Y_2 = X_2$.

(ii) Tunjukkan bahawa Y_2 adalah penganggar saksama bagi θ dengan varians θ^2.

(iii) Tunjukkan bahawa $E[Y_2|y_1]$ adalah suatu fungsi bagi y_1, katakan $\phi(y_1)$.

.../3

(iv) Sahkan Teorem Rao-Blackwell dengan menunjukkan bahawa statistik $\phi(Y_1)$ adalah penganggar saksama bagi θ dengan $Var[\phi(Y_1)] \leq Var(Y_2)$.

(40/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak dari taburan normal dengan min 0 dan varians θ.

(i) Dapatkan penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

(ii) Tunjukkan bahawa penganggar di atas adalah penganggar saksama bervarians minimum secara seragam (PSVMS) bagi θ.

(50/100)

4. (a) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak dari taburan Poisson dengan f.k.k.

$$f(x;\theta) = \begin{cases} e^{-\theta} \dfrac{\theta^x}{x!} & , \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & , \quad d.\ell.\ell.t. \end{cases}$$

(i) Tunjukkan bahawa statistik $\sum_{i=1}^{n} X_i$ adalah lengkap dan cukup.

(ii) Terbitkan satu PSVMS bagi θ.

(iii) Tunjukkan bahawa varians bagi penganggar di atas mencapai batas bawah Cramer-Rao.

(iv) Dapatkan batas bawah Cramer-Rao bagi varians penganggar saksama bagi $\frac{1}{\theta}$.

(60/100)

(b) Andaikan $\bar{X}$ sebagai min bagi suatu sampel rawak saiz n dari satu taburan $N(\mu, 9)$. Cari nilai n sedemikian hingga

$$P(\bar{X} - 1 < \mu < \bar{X} + 1) = 0.90$$

(20/100)

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sebagai suatu sampel rawak dari taburan $N(\mu, \sigma^2)$. Andaikan $0 < a < b$. Tunjukkan bahawa jangkaan matematik bagi panjang selang rawak

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2/b, \quad \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)2/a \right]$$

ialah $(b - a)(n\sigma^2/ab)$.

(20/100)

5. (a) Nyatakan Teorem Neyman-Pearson,

(20/100)

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ menandakan suatu sampel rawak saiz 10 dari suatu taburan Poisson dengan min θ, iaitu

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} , & x = 0, 1, \ldots, \quad \theta > 0 \\ 0 , & \text{d.}\ell.\ell.\text{t} \end{cases}$$

(i) Tunjukkan bahawa rantau genting C yang ditakrifkan oleh $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq 3$ ialah suatu rantau genting terbaik bagi menguji hipotesis $H_o: \theta = 0.1$ berlawanan dengan $H_a: \theta = 0.5$.

(ii) Bagi ujian ini, dapatkan paras keertian α.
$[Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \text{Poisson } (10\theta)]$.

(iii) Dapatkan fungsi kuasa, $K(\theta)$ dan tentukan kuasa bagi ujian ini pada $\theta = 0.5$.

(40/100)

(c) Pertimbangkan suatu taburan dengan f.k.k.

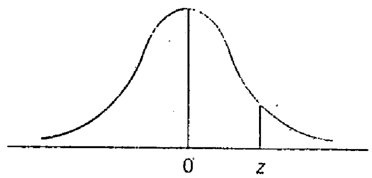
$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} , & x = 0, 1 \\ 0 , & \text{d.}\ell.\ell.\text{t} \end{cases}$$

Andaikan $H_o: \theta = \frac{1}{20}$ dan $H_1: \theta > \frac{1}{20}$. Gunakan teorem had memusat bagi menentukan saiz sampel n bagi suatu sampel rawak supaya ujian paling berkuasa secara seragam bagi H_o berlawanan dengan H_1 mempunyai fungsi kuasa $K(\theta)$, dengan $K(\frac{1}{20}) \doteq 0.05$ dan $K(\frac{1}{10}) \doteq 0.90$.

(40/100)

- oooOOooo -

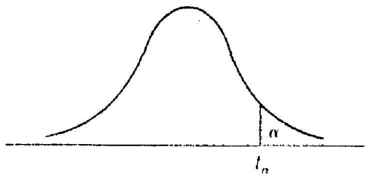
Table IV
Normal Curve Areas



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Source: Abridged from Table I of A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (New York: John Wiley & Sons, Inc.), 1952. Reproduced by permission of A. Hald and the publisher.

Table V
Critical Values of t



DEGREES OF FREEDOM	$t_{.100}$	$t_{.050}$	$t_{.025}$	$t_{.010}$	$t_{.005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Source: From M. Merrington, "Table of Percentage Points of the t-Distribution," *Biometrika*, 1941, *32*, 300. Reproduced by permission of the *Biometrika* trustees.