UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1986/87

MAT328 - Kombinatorik

Tarikh: 6 April 1987 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari

(3 jam)

Jawab LIMA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Berilah satu algoritma untuk menyenaraikan semua subset-r bagi $A = \{1,2,\ldots,n\}$. Dengan menggunakan algoritma itu, senaraikan semua subset-5 bagi $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

(30/100)

(b) Nyatakan prinsip rumah merparti yang termudah. Katakan $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ sebarang n+2 integer positif. Buktikan bahawa a_i, a_j $(i \neq j)$ boleh dipilih supaya $a_i - a_j$ atau $a_i + a_j$ dibahagikan oleh 2n.

(20/100)

(c) Carilah bilangan caranya untuk memilihaturkan a, a, a, a, a, b, c, d, e dengan syarat bahawa a tidak bersebelahan dengan a.

(25/100)

(d) Jika n adalah integer positif, dan

$$g(n) = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-k}{k},$$

buktikan bahawa $g(n-1) + g(n-2) = g(n)$.

(25/100)

2. (a) Carilah penyelesaian am bagi setiap hubungan jadi semula yang berikut:

$$h(n) - 2h(n-1) = 7n$$

$$h(n) = 2h(n-1) + h(n-2) - 2h(n-3).$$

(30/100)

(b) Cari $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$

disini n adalah integer positif.

(25/100)

(c) Katakah $h(n) = a_1 h(n-1) + \ldots + a_k h(n-k)$ suatu persamaan jadi semula; a_i adalah pemalar. Katakan q adalah suatu punca berulang dengan darjah 2 bagi persamaan ciri

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Buktikan bahawa

$$h(n) = q^n, \; h_1(n) = nq^n, \; h_2(n) = n^2 q^n$$

adalah penyelesaian-penyelesaian bagi hubungan jadi semula itu.

(25/100)

(d) Carilah bilangan pilihatur-n bagi $A = \{\infty.0, \infty.1\}$ dengan syarat bahawa 1 tidak bersebelahan dengan 1.

(20/100)

3. (a) Cari bilangan gabungan-5 bagi

$$A = \{3.a, 4.b, 2.c\}.$$

(25/100)

(b) Cari bilangan pilihatur-n bagi

$$A = \{\infty.1, \infty.3, \infty.5, \infty.7, \infty.9\}$$

dengan syarat bahawa tiap-tiap nombor 1, 3, 7 muncul sebilangan genap kali dalam pilihatur-n itu.

(25/100)

(c) Cari bilangan integer dengan 5 digit yang dapat didirikan daripada integer 1,2,3,4 dengan syarat bahawa setiap nombor 1,2,3,4 muncul sekurang-kurangnya satu kali.

(25/100)

(d) Dengan berapa carakah seorang boleh menaiki sebuah tangga yang mempunyai n anak tangga jikalau pada setiap langkah yang dia ambil dia boleh memanjat satu atau dua anak tangga?

(25/100)

4. (a) Carilah bilangan caranya untuk menyerahkan 4 biji buah mangga serupa dan 8 biji buah pisang serupa kepada 5 orang kanak-kanak.

(20/100)

(b) Cari bilangan caranya untuk menaburkan ℓ bola yang serupa ke dalam n kotak yang berlainan dengan syarat bahawa terdapat sekurang-kurangnya m kotak yang tidak mengandungi sebarang bola.

(20/100)

(c) (i) Katakan $q(n,m)$ menandakan bilangan cara untuk menaburkan n bola yang berlainan ke dalam m kotak yang serupa dengan syarat bahawa setiap kotak mengaundungi sekurang-kurangnya satu bola. Buktikan bahawa

$$q(n, m) = q(n-1, m-1) + mq(n-1, m)$$

carilah $q(5, 3)$, $q(5, 2)$.

(ii) Carilah bilangan cara untuk menaburkan 5 bola yang berlainan ke dalam 3 kotak yang serupa.

(40/100)

(d) Carilah bilangan caranya untuk menaburkan 2n benda yang berlainan ke dalam n kotak yang berlainan dengan syarat bahawa setiap kotak mengandungi dua dan hanya dua bola. Apakah bilangan caranya jika n kotak dalam soalan ini adalah serupa?

(20/100)

5. (a) Katakan $A = \{1,2,...,500\}$, carilah bilangan integer bagi set A yang boleh dibahagikan oleh 3 atau boleh dibahagikan oleh 5.

(20/100)

(b) Cari $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$.

(20/100)

(c) Jika $a(r) = \begin{cases} 2 & 0 \leqslant r \leqslant 3 \\ 2^{-r} + 5 & r \geqslant 4 \end{cases}$

cari $\Delta a(r)$.

(20/100)

(d) Jika $[x]_t = x(x-1) \ldots (x - t + 1)$,
tunjukkan bahawa $\Delta^m [x]_n = [n]_m [x]_{n-m}$.
Dengan ini tunjukkan bahawa

$$\Delta^{\ell} \binom{x}{k} \Big|_{x=0} = \begin{cases} 1 & \text{jika } \ell = k \\ 0 & \text{jika } \ell \neq k \end{cases}$$

(20/100)

(e) Selesaikan

$$na(n) + na(n-1) - a(n-1) = 2^n$$

dengan syarat awalan $a(0) = 273$.

(20/100)

6. (a) Tunjukkan bahawa penyelesaian bagi hubungan jadi semula

$$h(n+1) = \sum_{k=2}^{n} h(k)h((n+2)-k)$$

dengan syarat awalan $h(2) = 1$ ialah

$$h(n+1) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots ,$$

Nombor ini disebutkan nombor catalan.

(55/100)

(b) Katakan $s(n, k)$ nombor stirling jenis kedua.
Tunjukkan bahawa

$$s(n, 2) = 2^{n-1} - 1, \; s(n, n-1) = c(n, 2).$$

(15/100)

(c) Katakan $f(n, k)$ menandakan bilangan subset-k bagi $A = \{1,2, \ldots, n\}$ yang tidak mengandungi $\{1,2\},\{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}$ sebagai subsetnya.
Tunjukkan bahawa

$f(n, k) = f(n-2, k-1) + f(n-1, k)$ dan dengan ini tunjukkan

$$f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

(30/100)

- oooOooo -