UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT 320 Persamaan Pembezaan II

Masa : [3 jam]

Jawab **EMPAT** (4) soalan sahaja.

1. (a) Berikan bentuk penyelesaian khusus

$$y'' + 4y = f(x) \quad \text{jika}$$

(i) $f(x) = xe^x$,
(ii) $f(x) = x \sin 2x$.

Seterusnya, selesaikan persamaan

$$y'' + 4y = xe^x + x \sin 2x.$$

(b) Dapatkan penyelesaian am persamaan

$$y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(c) Tunjukkan bahawa penukaran pembolehubah $x = -\dfrac{u'}{a_2(t)u}$ akan menukar persamaan Riccati

$$x' = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$$

kepada persamaan linear peringkat kedua dalam u,

$$a_2u'' - \left(a_2' + a_1a_2\right)u' - a_0a_2^2u = 0.$$

.../2

Gunakan kaedah ini untuk menyelesaikan persamaan

$$t^2x' + tx + t^2x^2 = 1 .$$

(100/100)

2. (a) (i) Tunjukkan bahawa persamaan

$$2x^2y'' - xy' \quad (1+x)y = 0$$

mempunyai titik singular nalar pada $x = 0$.

(ii) Selesaikan persamaan di bahagian (i) dengan menggunakan kaedah Frobenius.

(b) Andaikan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Selesaikan sistem homogen $\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x}$.

(ii) Dapatkan ψ, matriks asasi, yang memenuhi syarat awal, $\psi(0) = I_3$.

(c) Kirakan jelmaan Laplace fungsi

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t, & t \ge 1 \end{cases} .$$

(100/100)

3. (a) (i) Dengan menggunakan pertukaran $x = e^z$ atau $z = \ln x$, tunjukkan bahawa persamaan Euler peringkat kedua $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ dengan $x > 0$ menjadi

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0 .$$

.../3

(ii) Selesaikan persamaan

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2\ln x$$

berpandukan keputusan di bahagian (i) atau dengan menggunakan cara lain.

(b) (i) Tunjukkan bahawa persamaan Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

boleh ditulis sebagai

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

(ii) Polinomial Legendre, P_n, adalah penyelesaian polinomial kepada persamaan Legendre dengan $\alpha = n$ yang memenuhi syarat $P_n(1) = 1$. Tunjukkan bahawa

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \text{jika} \quad m \neq n.$$

(100/100)

4. (a) Selesaikan masalah

$$\underset{\sim}{x}' = A\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{g} \quad \text{jika}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad g = \begin{pmatrix} t \\ 3e^t \end{pmatrix}.$$

(b) Pertimbangkan masalah Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

(i) Dapatkan nilai dan fungsi eigen sepadanan masalah ini.

(ii) Dapatkan $y = \phi(x)$ yang memenuhi persamaan dan syarat sempadan ini.

.../4

(iii) Tunjukkan bahawa $y'' + \pi^2 y = g$, $y(0) = y(1) = 0$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika

$$\int_0^1 g(x)\sin(n\pi x)dx = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Petunjuk:

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}.$$

(100/100)

5. Pertimbangkan persamaan gelombang

$$\alpha^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

dengan syarat sempadan

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0$$

dan syarat awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

(a) Tunjukkan bahawa persamaan ini mempunyai penyelesaian berbentuk

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a} \cos\frac{n\pi\alpha t}{a}.$$

(b) Nyatakan rumus untuk a_n.

(100/100)

- oooOOooo -