UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAT320 - Persamaan Pembezaan II

Tarikh: 26 Oktober 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari (3 jam)

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Tunjukkan $x = 0$ ialah titik biasa bagi persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (3x - 2)y = 0$$

Dapatkan penyelesaian am siri kuasa dalam kuasa x.

(b) Tunjukkan $x = 0$ ialah titik singular sekata bagi persamaan

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (x - 5)y = 0$$

Dapatkan dua penyelesaian siri kuasa yang sah di sekitar titik $x = 0$ dan tidak bersandar secara linear.

*(100/100)*

2. (a) Carikan nilai-nilai eigen dan fungsi-fungsi eigen bagi masalah Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

(b) Dapatkan siri trigonometri Fourier bagi fungsi $f(x)$ atas $-\pi \leq x \leq \pi$ di mana $f(x)$ ditakrifkan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -\pi \leq x < 0 \\ x , & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

.../2

(c) Selesaikan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ \frac{2}{t} + 4 \end{pmatrix}$$

atas selang $t > 0$. *(100/100)*

3. (a) Pertimbangkan set fungsi-fungsi $\{\phi_n\}$, di mana

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$\phi_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

atas selang $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Tunjukkan bahawa set $\{\phi_n\}$ ialah suatu sistem ortonormal terhadap fungsi pemberat yang mempunyai nilai malar 1 atas $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

(b) Fungsi-fungsi eigen ortonormal $\{\phi_n\}$ bagi masalah Sturm-Lionville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

diberikan oleh

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Dapatkan pengembangan formal bagi f, di mana $f(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, dalam siri $\{\phi_n\}$.

Bincangkan penumpuan pengembangan formal ini.

*(100/100)*

4. (a) Pertimbangkan persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{6\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Tentukan sama ada persamaan ini persamaan hiperbolik, parabolik atau elliptik. Dapatkan suatu penyelesaian persamaan ini yang mengandungi dua fungsi sebarangan.

(b) Guna kaedah pemisahan pembolehubah untuk mendapat suatu penyelesaian formal $y(x, t)$ bagi masalah

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$y(0, t) = 0 , \quad 0 \leqslant t < \infty ,$$

$$y(3\pi, t) = 0 , \quad 0 \leqslant t < \infty ,$$

$$y(x, 0) = 2 \sin^3 x , \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi ,$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3\pi$$

*(100/100)*

- oooOOooo -