

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT320 Persamaan Pembezaan II

[Masa: 3 jam]

Jawab **EMPAT** (4) soalan sahaja.

1. (a) Cari penyelesaian am bagi

$$y'' - 3y' + 2y = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

- (b) Selesaikan masalah nilai awal

$$y'' - 9y = 10 - 5xe^{2x} + \sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

- (c) (i) Cari penyelesaian am bagi sistem berikut

$$\tilde{X}' = A\tilde{X} + \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \tilde{X} + \begin{pmatrix} 3t - 3 \\ -3t - 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ -7e^{3t} \end{pmatrix}$$

- (ii) Berikan bentuk penyelesaian khusus bagi sistem (i) di atas jika

(i) $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}$

(ii) $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$

(iii) $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} te^{7t} \\ \sec t \end{pmatrix}$

Jangan selesaikan untuk mendapatkan penyelesaian khusus bagi bahagian (ii).

[100/100]
.../2

2. (a) Cari dua penyelesaian tak bersandar linear kepada

$$y'' - xy' - y = 0,$$

di dalam bentuk siri kuasa berpusat pada $x = 0$.
Tunjukkan bahawa dua penyelesaian di atas adalah tak bersandar linear. Di manakah setiap penyelesaian menumpu? Tunjukkan jawapan.

- (b) Selesaikan masalah nilai awal

$$\tilde{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \tilde{X}, \quad \tilde{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

[100/100]

3. (a) Cari fungsi-fungsi eigen bagi

$$y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Kembangkan fungsi-fungsi berikut ke dalam bentuk siri daripada fungsi-fungsi eigen di atas

- (i) $f(x) = 1$
(ii) $f(x) = x$

- (b) Buktikan bahawa wujud n dan n sahaja vektor penyelesaian yang tak bersandar linear untuk sistem

$$\tilde{x}' = A\tilde{x}$$

di mana A adalah suatu matriks $n \times n$.

Anda boleh gunakan teorem kewujudan dan keunikan bagi sistem persamaan pembezaan linear

$$\tilde{x}' = A\tilde{x}$$

untuk soalan ini tanpa memberi bukti.

[100/100]

4. (a) Tunjukkan bahawa $x = 0$ ialah titik singular sekata bagi

$$2xy'' + (1 + x)y' - 2y = 0.$$

Cari dua penyelesaian tak bersandar linear dalam bentuk siri kuasa dari x .

.../3

(b) Katakan $\phi_1(x)$ dan $\phi_2(x)$ ialah dua penyelesaian tak bersandar linear untuk

$$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + q(x)y = 0, \quad (A)$$

dan y_p ialah suatu penyelesaian khusus kepada

$$\ddot{y} + p(x)\dot{y} + q(x)y = g(x). \quad (B)$$

Buktikan bahawa semua penyelesaian kepada (B) boleh ditulis dalam bentuk

$$y = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + y_p$$

untuk pemalar a_1, a_2 tertentu.

[100/100]

5. Tunjukkan bahawa persamaan haba berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, a), \quad t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad x \in (0, a).$$

mempunyai penyelesaian berbentuk

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 kt}{a^2}\right)$$

Seterusnya berikan rumus bagi a_0 dan a_n .

(i) Jika $f(x) = \cos \frac{\pi x}{a} + 5 \cos \frac{3\pi x}{a}$, apakah $u(x, t)$?

(ii) Jika $f(x) = x$, apakah pula $u(x, t)$?

[100/100]

- ooo00ooo -