

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1988/89
MAT313 - Aljabar Moden I

Tarikh: 3 November 1988

Masa: 2.15 ptg. - 5.15 ptg.
(3 jam)

Jawab mana-mana LIMA soalan.

1. (a) Katakan A dan B adalah set. Buktikan bahawa

(i) $A - B = A \Rightarrow B - A = B$

(ii) $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B \Rightarrow A \cap B = \phi$

(20/100)

(b) Katakan H adalah subkumpulan bagi kumpulan $\langle G, * \rangle$. Hubungan W ditakrifkan atas G oleh $aWb \iff a * b^{-1} \in H$. Buktikan bahawa W adalah hubungan kesetaraan atas G.

(30/100)

(c) Katakan $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ adalah fungsi yang satu-ke-satu dan keseluruhan. Buktikan bahawa fog adalah satu-ke-satu dan keseluruhan.

(20/100)

(d) Carilah semua integer x yang memenuhi $6x \equiv 29 \pmod{77}$.

(30/100)

.../2

2. (a) Katakan

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ dan } ad - bc = 1 \right\}$$

dan x adalah pendaraban matriks.

Tunjukkan bahawa x adalah operasi dedua atas M yang kalis sekutuan tetapi tidak kalis tukar tertib.

Carilah identiti bagi sistem $\langle M, x \rangle$ dan songsangan bagi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M.$$

(40/100)

(b) Katakan H dan K dua subkumpulan bagi kumpulan $\langle G, * \rangle$. Jika $HK = KH$, buktikan bahawa HK adalah subkumpulan bagi G .

(30/100)

(c) Katakan $\langle G, * \rangle$ adalah suatu kumpulan yang mempunyai 10 unsur. Buktikan bahawa wujud $a \in G$ yang bukan identiti dan memenuhi $a * a = e$. Di sini e adalah identiti.

(30/100)

3. (a) Katakan H adalah suatu subkumpulan bagi kumpulan terhingga $\langle G, * \rangle$ dan $a \in G$. Suatu fungsi $f: H \rightarrow Ha$ ditakrifkan dengan

$$(h)f = h * a, \quad h \in H$$

(i) Buktikan bahawa f adalah satu-ke-satu dan keseluruhan.

(ii) Buktikan bahawa $|G|$ terbahagikan oleh $|H|$.

(40/100)

(b) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan terhingga dan $a \in G$. Buktikan bahawa peringkat G terbahagikan oleh peringkat a .

(30/100)

(c) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan dan $|G| = p$ adalah suatu nombor perdana. Buktikan bahawa G adalah suatu kumpulan kitaran.

(30/100)

.../3

4. (a) Katakan $H = \{e, (12)(34)\}$ dan $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Tunjukkan bahawa H adalah subkumpulan normal bagi K dan K adalah subkumpulan normal bagi A_4 tetapi H bukan normal di dalam A_4 .

(40/100)

- (b) Buktikan bahawa sebarang subkumpulan bagi suatu kumpulan kitaran adalah kumpulan kitaran.

(40/100)

- (c) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan dan $a \in G$. Katakan peringkat a terhingga dan ditandakan dengan $o(a)$. Buktikan bahawa $o(a^{-1}) = o(a)$.

(20/100)

5. (a) Katakan dua fungsi f dan g ditakrifkan atas S_4 seperti berikut:

$$(\alpha)f = (12)\alpha,$$

$$(\alpha)g = (12)\alpha(12).$$

Tentukan sama ada f atau g homomorfisma.

(30/100)

- (b) Katakan $G = \langle a \rangle$ adalah kumpulan kitaran yang tak terhingga. Carilah satu isomorfisma daripada $\langle G, * \rangle$ kepada $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$.

(30/100)

- (c) Katakan G_1 dan G_2 dua kumpulan dan e_2 adalah identiti bagi G_2 . Katakan $f: G_1 \rightarrow G_2$ adalah suatu homomorfisma dan

$$H = \{x \in G_1 \mid (x)f = e_2\}.$$

Buktikan bahawa H adalah subkumpulan normal bagi G_1 .

(40/100)

.../4

6. (a) Takrifkan sebutan-sebutan berikut:

- (i) gelanggang ,
- (ii) medan ,
- (iii) domain integer ,
- (iv) unggulan.

(20/100)

(b) Katakan $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Buktikan bahawa H adalah subgelanggang bagi $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ tetapi bukan unggulan.

(20/100)

(c) Buktikan bahawa persilangan dua subgelanggang B_1, B_2 bagi suatu gelanggang A adalah subgelanggang bagi A .

(20/100)

(d) Katakan $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Dua fungsi f dan g ditakrifkan atas H seperti berikut:

$$(a + b\sqrt{2})f = a - b\sqrt{2} ,$$

$$(a + b\sqrt{2})g = -a + b\sqrt{2} .$$

Tentukan sama ada f atau g homomorfisma gelanggang.

(40/100)

-ooo00ooo-