UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT313 Aljabar Moden I

Masa: [3 jam]

Jawab mana-mana LIMA soalan.

1. (a) Buktikan atau sangkalkan:

(i) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

(30/100)

(b) Fungsi $f : \mathbb{R}' \longrightarrow \mathbb{R}$ ditakrifkan dengan

$$(x)f = \begin{cases} x + 1 \ , & x \le 0 \\ x^2 + x + 1 \ , & x > 0 \end{cases}$$

Buktikan f adalah satu-ke-satu dan keseluruh dan cari songsangannya.

(30/100)

(c) Katakan W ialah suatu hubungan kesetaraan atas set A. Buktikan:

(i) Jika $(x, y) \in W$, maka $[x]W = [y]W$

(ii) Jika $(x, y) \notin W$, maka $[x]W \cap [y]W = \phi$

(40/100)

2. Katakan

$$G = \left\{ (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \ , \ b \in \mathbb{R} \ \text{ dan } a \neq 0 \right\}$$

.../2

Katakan operasi * ditakrifkan atas G dengan

$(a,b) * (c,d) = (ac,\ bc + d)$

(a) Tunjukkan bahawa $\langle G, * \rangle$ adalah suatu kumpulan

(40/100)

(b) Tunjukkan bahawa $H = \left\{ (1,y) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$ adalah subkumpulan bagi G.

(20/100)

(c) Tentukan sama ada H suatu subkumpulan normal bagi G.

(20/100)

(d) Cari peringkat bagi (1,1) dan peringkat bagi (-1,1).

(20/100)

3. (a) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Katakan peringkat bagi a yang ditandakan dengan O(a) adalah terhingga.

Buktikan $O(a^{-1}) = O(a)$.

(30/100)

(b) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a, b \in G$. Buktikan

$$(a^{-1} * b^{n}) * a = [(a^{-1} * b) * a]^{n}$$

bagi semua integer n.

(40/100)

(c) Buktikan bahawa sebarang kumpulan yang mempunyai empat unsur adalah abelan.

(30/100)

.../3

4. (a) Katakan $<G,*>$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$ ialah suatu unsur tetap. Katakan

$$H = \left\{ x \in G \mid x * a = a * x \right\}$$

Buktikan H adalah suatu subkumpulan bagi G.

(30/100)

(b) Buktikan bahawa sebarang subkumpulan bagi suatu kumpulan kitaran adalah suatu kumpulan kitaran.

(40/100)

(c) Jika $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Cari (i) $O(\alpha)$ dan $O(\beta)$

(ii) α^{21}

(iii) β^{-21}

(30/100)

5. (a) Katakan $<G,*>$ ialah suatu kumpulan dan H,K dua subkumpulan bagi G. Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

(i) $H \cap K$ adalah subkumpulan bagi G.

(ii) $H \cup K$ adalah subkumpulan bagi G.

(40/100)

(b) Katakan H ialah suatu subkumpulan bagi kumpulan $<G,*>$ dan $a, b \in G$. Buktikan

$$b \in Ha \iff Ha = Hb.$$

(20/100)

(c) Katakan $<G,*>$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Buktikan bahawa peringkat bagi G terbahagikan oleh peringkat bagi a.

(20/100)

.../4

(d) Buktikan bahawa jika peringkat bagi suatu kumpulan G sama dengan nombor perdana p, maka G adalah kumpulan kitaran.

(20/100)

6. (a) Katakan

$H = \left\{ e, \ (1\ 2\ 3)\ , \ (3\ 2\ 1) \right\}$. Cari semua koset kanan bagi H di dalam S_3 dan tentukan sama ada H subkumpulan normal bagi S_3.

(20/100)

(b) Fungsi f ditakrifkan atas S_4 dengan

$(\alpha)f = (1\ 2\ 3\ 4)\ \alpha\ (4\ 3\ 2\ 1)\ , \quad \alpha \in S_4$.

Tentukan sama ada f suatu automorfisma atas S_4.

(30/100)

(c) Katakan $\mathbb{R}$ ialah set semua nombor nyata dan + dan x ialah penambahan dan pendaraban biasa.

Dua operasi $\oplus$ dan $\otimes$ ditakrifkan sebagai

$a \oplus b = a + b + 1$

$a \otimes b = (a \times b) + a + b$

Buktikan

(i) $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ adalah satu gelanggang

(ii) $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ adalah isomorfisma dengan $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$.

(50/100)

- oooOOooo -