

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1986/87

MAT313 - Aljabar Moden I

Tarikh: 25 Jun 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengahari
(3 jam)

Jawab mana-mana LIMA soalan. Semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Takrifkan

- (i) fungsi,
- (ii) hubungan kesetaraan.

(10/100)

(b) Suatu fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ditakrifkan dengan $(x)f = x^2 + 2x$, $x \in \mathbb{Z}$.

Di sini \mathbb{Z} adalah set semua integer.

Tentukan sama ada f satu-ke-satu atau keseluruhan.

(30/100)

(c) Katakan g dan h adalah fungsi daripada \mathbb{Z} kepada \mathbb{Z} yang ditakrifkan dengan

$$(x)f = |x| - 2, \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$(x)g = \begin{cases} x-2, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}, \quad (x \in \mathbb{Z})$$

Carilah fungsi gubahan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

(30/100)

(d) Katakan \mathbb{R} adalah set semua nombor nyata. M dan N adalah hubungan atas \mathbb{R} yang ditakrifkan dengan

$$M = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ dan } x - y \in \mathbb{Z}\}$$

$$N = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ dan } xy + 1 \geq 0\}$$

.../2

Tentukan sama ada M, N refleksif, simetri atau transitif.

(30/100)

2. (a) Katakan $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ dan $*$ adalah operasi yang ditakrifkan dengan

$$a * b = a + b + ab, \quad \forall a, b \in G.$$

Tentukan sama ada sistem $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan.

(30/100)

- (b) Buktikan atau sangkalkan pernyataan berikut:

Jika $b \in \mathbb{Z}$, maka terdapat integer x yang memenuhi

$$2x \equiv b \pmod{5}.$$

(30/100)

- (c) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan dan H, K subkumpulan bagi G . Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

(i) $H \cap K$ adalah subkumpulan bagi G .

(ii) $H \cup K$ adalah subkumpulan bagi G .

(iii) HK adalah subkumpulan bagi G .

(40/100)

3. (a) Takrifkan

(i) kumpulan kitaran,

(ii) pilihatur,

(iii) peringkat bagi suatu kumpulan,

(iv) peringkat bagi suatu unsur di dalam kumpulan.

(20/100)

- (b) Cari peringkat bagi pilihatur-pilihatur berikut:

(i) $(1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 6)$

(ii) $(1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)$

(iii) $(1\ 2\ 3)\ (3\ 4\ 5\ 6)$

(iv) $(1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6)$.

(20/100)

.../3

- (c) Buktikan bahawa jika H adalah subkumpulan bagi kumpulan G , maka peringkat bagi G terbahagikan oleh peringkat bagi H .

(40/100)

- (d) Buktikan bahawa jika peringkat bagi suatu kumpulan G sama dengan nombor perdana p , maka G adalah kumpulan kitaran.

(20/100)

4. (a) Cari semua koset kanan bagi $H = \{e, (12)\}$ di dalam kumpulan S_3 .

(20/100)

- (b) Tentukan sama ada $H = \{e, (12)\}$ atau $K = \{e, (123), (321)\}$ subkumpulan normal bagi S_3 .

(40/100)

- (c) Katakan H adalah suatu subkumpulan bagi kumpulan G . Buktikan bahawa

(i) $b \in Ha \iff Ha = Hb$

(ii) $b \notin Ha \iff Ha \cap Hb = \emptyset$.

(40/100)

5. (a) Takrifkan

(i) gelanggang

(ii) medan

(iii) unggul.

(15/100)

- (b) Operasi \oplus dan \otimes ditakrifkan atas \mathbb{R} dengan

$$a \oplus b = a + b - 1, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a \otimes b = a + b - ab, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Tentukan sama ada sistem $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$

(i) suatu gelanggang, atau

(ii) suatu medan.

(60/100)

.../4

- (c) Buktikan bahawa jika unggulan U bagi gelanggang R mempunyai unsur uniti, maka $U = R$.

(25/100)

6. (a) Fungsi f dan g ditakrifkan dengan

(i) $(x)f = (123)x, x \in S_4$

(ii) $(x)g = (123)x(321), x \in S_4$

Tentukan sama ada f atau g endomorfisma atas S_4 .

(40/100)

- (b) Diberi kumpulan-kumpulan berikut:

$$L = \{1, i, -1, -i\} \text{ dengan pendaraban biasa } (i^2 = -1)$$

$$M = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$N = \{e, (1234), (13)(24), (4321)\}$$

(Di sini M dan N adalah subkumpulan bagi S_4)
Buktikan atau sangkalkan

- (i) L dan M isomorfik
(ii) L dan N isomorfik
(iii) M dan N isomorfik.

(40/100)

- (c) Katakan $\langle \mathbb{Z}, +, \times \rangle$ adalah gelanggang integer dengan penambahan dan pendaraban biasa.

Jika $(x)f = ax + b$ adalah homomorfisma gelanggang daripada \mathbb{Z} kepada \mathbb{Z} , carilah nilai-nilai a dan b yang mungkin.

(20/100)

- oo0oo -