

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT 313 Aljabar Moden

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

(100/100)

1. (a) Diberi

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \leq y\}$$
$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x < y\}$$
$$M_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \frac{x}{y} \geq -4 \right\}$$

Adakah M_i refleksif?

Adakah M_i simetri?

Adakah M_i transitif? bagi $i = 1, 2, \text{ dan } 3$.

(b) Diberi $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ adalah fungsi. Buktikan atau sangkalkan.

(i) fg 1-1 \Rightarrow f 1-1

(ii) fg 1-1 \Rightarrow g 1-1

(iii) fg keseluruhan \Rightarrow f keseluruhan

(iv) fg keseluruhan \Rightarrow g keseluruhan.

(c) Cari peringkat dan songsang bagi unsur-unsur dari kumpulan tersebut:

(i) $(123)(234)(56) \in S_6$

(ii) $[4] \in \langle \mathbb{Z}_{13} - [0], \oplus \rangle$

(d) Diberi $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = (xy)^3 = e \rangle$. Cari $|G|$.

.../2

2. (a) Diberi H dan K adalah subkumpulan bagi suatu kumpulan $\langle G, \cdot \rangle$ dan $K \triangleleft G$. Buktikan:

(i) $H \cap K \triangleleft\triangleleft G$
Adakah $H \cap K \triangleleft G$?

(ii) $HK < G$
Adakah $HK \triangleleft G$?

(iii) $\frac{H}{H \cap K} \simeq \frac{HK}{K}$

(b) Diberi $K = \langle (123)(45) \rangle$ dan $H = \langle (123) \rangle$.

(i) Cari $K \cap H$

(ii) Cari KH

Adakah KH suatu kumpulan kitaran?

3. (a) θ adalah suatu homomorfisma daripada kumpulan $\langle G, \circ \rangle$ kepada kumpulan $\langle H, * \rangle$; e dan f adalah identiti bagi G dan H masing-masing. Buktikan:

(i) $K = \{g \in G \mid g\theta = f\}$ adalah suatu subkumpulan normal bagi G .

(ii) $G\theta = \{g\theta \mid g \in G\}$ adalah suatu subkumpulan bagi H . Adakah $G\theta \triangleleft H$?

(iii) $\frac{G}{K}$ berisomorfisma dengan $G\theta$. Jika $\frac{G}{K}$ berisomorfisma dengan H , apa boleh dikatakan mengenai θ ?

(b) Katakan fungsi θ daripada S_3 ke kumpulan $H = \{1, -1\}$ dengan

$$\begin{aligned} x\theta &= 1 \text{ jika } X \text{ adalah pilihatur genap} \\ &= -1 \text{ jika } X \text{ adalah pilihatur ganjil} \end{aligned}$$

Cari $K = \{x \mid x\theta = 1\}$ dan $\frac{S_3}{K}$.

.../3

4. (a) Beri takrif dan contoh bagi setiap berikut:

- (i) gelangan
- (ii) gelangan pembahagian
- (iii) domain integer
- (iv) medan

(b) Buktikan: $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ suatu medan $\Rightarrow \langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$ suatu domain integer.

(c) Buktikan $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$ adalah suatu medan jdhj n adalah nombor perdana.

- oooOOooo -