UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAT301 - Analisis Kompleks

Tarikh: 27 Oktober 1988 Masa: 2.15 petang - 5.15 petang (3 jam)

Jawab kesemua LIMA soalan.

1. (i) Jika p dan q adalah integer yang tidak mempunyai pembahagi yang sama, kecuali 1, persamaan

$$z = \alpha^{p/q}$$

bermaksud $z^q = \alpha^p$. Tunjukkan bahawa $|z| = |\alpha|^{p/q}$ dan $\arg z = \frac{p}{q} \arg \alpha + \frac{2\pi k}{q}$. Di sini $k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$. Justru itu kirakan kesemua punca $(-1)^{1/3}$, $(1)^{-1/3}$, $(1+i)^{1/3}$, $(1-i)^{-1/3}$.

(ii) Dari $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, deduksikan bahawa

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

untuk n integer dan $z \neq 0$. Justru itu tunjukkan bahawa

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta \sin^2\theta + 5\cos\theta \sin^4\theta$$

(iii) Tunjukkan bahawa bahagian nyata $z^{1/q} + \bar{z}^{1/q}$ diberi oleh

$$2|z|^{1/q} \cos\left(\frac{\theta}{q} + \frac{2k\pi}{q}\right),$$

dengan $k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$.
Carikan bahagian nyata $(1 - i\sqrt{5})^{1/3} + (1 + i\sqrt{5})^{1/3}$.

(100/100)

.../2

2. (i) Nyatakan dengan jelas syarat-syarat perlu dan mencukupi agar sebarang fungsi $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ analisis dalam suatu domain D.

Jika f analisis, tunjukkan $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Adakah fungsi

$$f(z) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad z \neq 0$$

dan

$$f(0) = 0$$

analisis di $z = 0$?

(ii) Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analisis dalam suatu domain D, tunjukkan bahawa syarat Cauchy-Riemann dalam koordinat kutub adalah

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Tunjukkan juga $\frac{df}{dz} = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial r}$.

Adakah $z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$, dengan $r > 0$ dan $0 < \theta < 2\pi$, analisis?

(iii) Jika $f(z)$ dan $g(z)$ analisis dalam suatu domain D yang mengandungi titik α, dan jika $f(\alpha) = 0$ dan $g(\alpha) = 0$, serta $g'(\alpha) \neq 0$, tunjukkan

$$\operatorname*{had}_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \operatorname*{had}_{z\to\alpha} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Carikan $\operatorname*{had}_{z\to i} \frac{e^{\pi z} + 1}{z^2 + 1}$.

(100/100)

.../3

3. (i) Kita takrifkan $\sin z$ dan $\cos z$ agar

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ , \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,$$

dengan mengambil kira bahawa e^{iz} dan e^{-iz} adalah fungsi-fungsi keseluruhan. Tunjukkan

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

dan $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$. Buktikan bahawa

$$\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

(ii) Diberi sebarang nombor kompleks z, berikan takrif untuk fungsi-fungsi $\sinh z$ dan $\cosh z$. Selesaikan $\sinh z = -1$.

(iii) Jika $z = re^{i\theta}$, untuk $z \neq 0$, kita takrifkan

$$\log z = \log |z| + i \arg z\ ,$$

dan untuk $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}\ .$$

Jika $\alpha \neq 0$ dan jika satu nilai $\log \alpha$ sahaja digunakan, tunjukkan

$$\frac{d}{dz} \alpha^{z} = \alpha^{z} \log \alpha .$$

Selesaikan $z^{\alpha} = \beta$, dan $\alpha^{z} = \beta$. Di sini $\alpha\beta \neq 0$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(100/100)

4. (i) Kita takrifkan kamiran sebarang fungsi $f(z)$ yang selanjar di atas lengkuk C sebagai

$$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\, dt\ ,$$

.../4

dengan C diberi oleh $\zeta = \zeta(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ dan, $\zeta(a)$ dan $\zeta(b)$ masing-masing sebagai titik awal dan akhir C. Jika C diberi oleh $|z| = r$, r pemalar, nilaikan

$$\int_C \frac{dz}{z}, \quad \int_C \frac{dz}{|z|} \text{ dan } \int_C \frac{|dz|}{z}.$$

(ii) Jika C adalah garis lurus dari $z = 2i$ ke $z = 2$, tunjukkan bahawa

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^3} \right| \leqslant 1.$$

(iii) Nyatakan dengan jelas Teorem kamiran Cauchy. Jika $0 < r < R$, dari kamiran $\frac{R+z}{(R-z)z} \equiv \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}$ di atas bulatan $|z| = r$, atau dengan cara lain, nilaikan

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\, d\theta .$$

(100/100)

5. (i) Nyatakan dengan jelas Teorem Reja Cauchy.

Jika a dan b adalah nombor kompleks dengan bahagian nyatanya positif, tunjukkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx = \frac{\pi}{a^2 - b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right).$$

Di sini $a \neq b$. Sekarang biarkan

$$I_1 = \frac{\pi}{a^2 - b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$$

.../5

dan

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} \, dx$$

Dari petua ℓ'Hospital, carikan $\lim\limits_{b \to a} I_1$. Adakah had ini sama dengan I_2?

(Anda boleh menggunakan keputusan $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}$ untuk $a > 0$).

(ii) Dari $2 \cos n\theta = z^n + z^{-n}$, tunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 3 \cos \theta} \, d\theta = \frac{\pi}{54} .$$

(100/100)

-oooOOooo-