

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MAT301 - Analisis Kompleks

[Masa: 3 jam]

Jawab semua soalan.

1. (a) Selesaikan setiap persamaan berikut dengan meninggalkan jawapan dalam bentuk Cartesan.

(i) $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ (ii) $e^z = \sqrt{3} - i$

(iii) $\cos z = \sqrt{3}i$

(iv) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$ diberikan $z = i$ ialah satu punca.

- (b) Tunjukkan bahawa $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ merupakan fungsi harmonik. Dapatkan konjugat harmonik u .

- (c) Untuk nombor kompleks tak sifar z dan w , tunjukkan bahawa

$$|z + w| = |z| + |w|$$

$$\text{jh} \ w = tz, \quad t \geq 0.$$

Andaikan $R = \{z: |z| \leq 1\}$, n integer positif dan

$$f(z) = az^n + b$$

untuk pemalar kompleks tak sifar a dan b . Tunjukkan bahawa

$$\begin{aligned} \text{maks } |f(z)| &= |a| + |b| \\ z \in R \end{aligned}$$

dan dapatkan semua titik pada R yang menghasilkan kemaksimuman $|f(z)|$, iaitu titik-titik z supaya $|f(z)| = |a| + |b|$.

(100/100)

...2/-

2. (a) Bincangkan keterbezaan dan keanalisisan setiap fungsi berikut. Jika terbezakan, dapatkan $f'(z)$.

(i) $f(z) = 8x - x^3 - xy^2 + i(x^2y + y^3 - 8y)$

(ii) $f(z) = (\ln r)^2 - \theta^2 + i2\theta \ln r$, $z = re^{i\theta}$ dengan $r > 0$
dan $-\pi < \theta < \pi$.

(b) Jika $w = \sin z$, tunjukkan bahawa w memetakan garis mengufuk $x + ib$, b pemalar tak sifar, kepada suatu elips pada satah w . Dapatkan persamaan elips tersebut.

(c) Andaikan f analisis pada domain terkait ringkas D dan C kontur tertutup ringkas berarah positif dalam D . Jika z_1 dan z_2 terletak di pedalaman C , tunjukkan bahawa

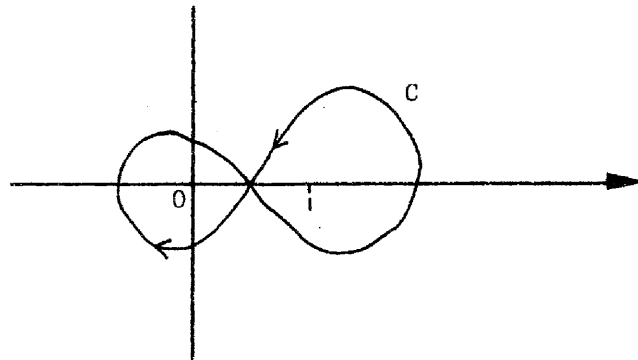
$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz .$$

Apakah yang berlaku apabila $z_2 \rightarrow z_1$?

(100/100)

3. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut.

(i) $\int_C \frac{1}{z^2 - z} dz$ pada kontur C seperti yang digambarkan:



...3/-

(ii) $\int_B \frac{dz}{(z+1)(z-1)^2}$ dengan B sebagai bulatan $|z-1|=1$ berarah positif.

(iii) $\int_{-1-i\pi/2}^{2+\pi i} ze^z dz$ dengan lintasan kamiran sebagai sebarang kontur dari $-1-i\pi/2$ ke $2+\pi i$.

(iv) $\int_B \frac{e^z}{z^2(z^2-4)} dz$ dengan B sebagai bulatan $|z|=3$ berarah positif.

(v) $\int_{-i}^{2i} 2z^{-1/2} dz$ dengan $z^{-1/2}$ sebagai cabang pada domain $D = \{z = re^{i\theta} : r > 0, -\pi/2 < \theta < 3\pi/2\}$ dan lintasan kamiran ialah sebarang kontur yang terletak di sebelah kanan paksi khayalan dari $-i$ ke $2i$.

- (b) Jika f analisis dan mempunyai pensifar peringkat k pada titik z_0 , tunjukkan bahawa fungsi f'/f mempunyai kutub ringkas pada z_0 .

(100/100)

4. (a) Untuk setiap fungsi berikut, tentukan titik kesingularan, nyatakan jenisnya dan jika berkenaan, nyatakan peringkatnya.

(i) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2}$

(ii) $f(z) = ze^{1/z}$

(iii) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+3z+2}$

...4/-

(b) Jika f fungsi seluruh dan $|f(z)| \geq 1$ untuk setiap z , tunjukkan bahawa f merupakan fungsi malar.

(c) Dengan mengamirkan $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$, tunjukkan bahawa

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1.$$

Dengan menulis $z = 1 + (z - 1)$, dapatkan perkembangan siri Taylor untuk fungsi $f(z) = \log z$ yang sah pada $|z - 1| < 1$. Seterusnya, tunjukkan bahawa

$$|\log z| \leq r/(1-r), \quad |z-1| \leq r < 1.$$

(100/100)

- ooo00ooo -