UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT 301 Analisis Kompleks

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Cirikan lokus titik-titik z pada satah kompleks yang memenuhi

$$\left|\frac{z - 1}{z + 1}\right| \geq 2.$$

(b) Andaikan $S = \{z: 0 \leq \text{Ny}(iz) < 3\pi\}$. Lakarkan set S pada satah kompleks. Dapatkan set titik pedalaman, set titik had dan set titik sempadan untuk S. Tentukan sama ada S adalah terbuka atau tertutup.

(c) Nilaikan dalam bentuk Cartesan

(i) $(-1 + \sqrt{3}\, i)^{1/2}$ (ii) $(-1 + \sqrt{3}\, i)^{3/2}$

(d) Andaikan

$$f(z) = \begin{cases} (\text{Ny } z)^2/|z|, & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

dan

$$g(z) = \begin{cases} (\text{Ny } z)/|z|, & z \neq 0 \\ 0\ , & z = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa f adalah selanjar pada z = 0, akan tetapi g tak selanjar pada z = 0.

(100/100)

2. (a) Tunjukkan $u(x, y) = 2y(3 - 2x)$ merupakan fungsi harmonik pada satah kompleks. Dapatkan fungsi konjugat harmonik u.

...2/-

(b) Jika

$$f(z) = (y^2 - x) + i(x^2 - y), \qquad z = x + iy,$$

dapatkan titik-titik z pada satah kompleks supaya f terbezakan. Nilaikan f' dan tentukan keanalisian f pada titik-titik tersebut.

(c) Nilaikan

$$\int_G z \, Ny(z) dz$$

dengan G sebagai tembereng garis dari $z_1 = -1 - i$ ke $z_2 = 2(1 + i)$.

(d) Dengan menggunakan cabang prinsipal $(1 - z)^i$, tunjukkan bahawa

$$e^{-\pi/2} < |(1 - z)^i| < e^{\pi/2}, \qquad |z| < 1.$$

(100/100)

3\. (a) Selesaikan setiap persamaan berikut:

(i) $e^z = -1 - \sqrt{3}\, i$

(ii) $\sin z = -2$

(b) Dengan menggunakan antiterbitan, nilaikan

$$\int_{-2}^{2} z^{-1/2} \, dz$$

dengan $z^{-1/2}$ sebagai cabang prinsipal dan lintasan kamiran ialah sebarang kontur yang terletak di sebelah atas paksi x dari $z_1 = -2$ ke $z_2 = 2$.

(c) Andaikan f analisis pada domain D yang mengandungi cakera tertutup $|z - z_0| \le r$, $r > 0$. Tunjukkan bahawa

...3/-

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

Gunakan keputusan ini untuk menilaikan

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\left(2i + \frac{1}{\pi}e^{i\theta}\right)d\theta$$

(d) Andaikan f fungsi seluruh dan pada bulatan $B(r) = \{z: |z - z_0| = r\}$, $r > 0$, **modulus maksimum f,** iaitu

$$M(r) = \text{maks}\{|f(z)|: z \in B(r)\},$$

memenuhi

$$M(r) \le a\,\ell n\, r, \qquad a > 0, \qquad r > 0.$$

Tunjukkan bahawa $f^{(n)}(z_0) = 0$ untuk setiap **integer** positif n.

(100/100)

4. (a) Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $\displaystyle\int_B \frac{e^{2z}\sin z}{(z + 4)(z - \frac{\pi}{2}i)}\,dz$, dengan B **sebagai** bulatan berarah positif $|z| = 2$.

(ii) $\displaystyle\int_B \frac{z\sin(2z)}{(z + 4)^3}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z + 4| = 1$.

(iii) $\displaystyle\int_B \frac{e^{2z}}{z(z - 2)}\,dz$, dengan B sebagai bulatan berarah positif $|z| = 3$.

...4/-

(b) Andaikan R sebagai rantau yang tertutup, terbatas dan terkait. Andaikan $f = u + iv$ fungsi analisis pada pedalaman R serta selanjar pada R. Tunjukkan v mencapai nilai maksimum hanya pada sesuatu titik $z_0 = x_0 + iy_0$ yang terletak pada sempadan R, iaitu $z_0 \in \partial R$.

(c) Andaikan f fungsi seluruh dan $|f(z)| \leq |z|$ untuk setiap z. Tunjukkan bahawa f berbentuk $f(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$.

(100/100)

- oooOOooo -