

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA  
Peperiksaan Semester Tambahan  
Sidang Akademik 1993/94  
Jun 1994  
MAT 301 - Analisis Kompleks  
Masa : [ 3 jam ]

---

Jawab **kesemua** lima (5) soalan.

1. (a) Buktikan bahawa

$$\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2} e^{i(\alpha - (\pi/2))}$$

- (b) Dengan mempertimbangkan punca-punca untuk

$$z^{2n+1} + 1 = 0 \quad (n \text{ integer})$$

tunjukkan bahawa

$$\sum_{k=-n}^n \cos \left( \frac{2k+1}{2n+1} \right) \pi = 0.$$

- (c) Dengan menggunakan Teorem De Moivre, buktikan bahawa

$$\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta - 20 \sin^3 \theta + 5 \sin \theta.$$

$$\text{Dedusikan bahawa } \sin^2 72^\circ = (5 + \sqrt{5})/8.$$

(100/100)

2. (a) Takrifkan (a) keselanjaran (b) keterbezaan suatu fungsi kompleks  $f(z)$  pada titik  $z = a$ , dan dapatkan syarat-syarat yang perlu untuk keterbezaan  $f(z)$  pada  $z = a$ .

(b) Buktikan bahawa fungsi

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3 + i(x^3 - y^3)}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

selanjar pada titik  $z = 0$ , tetapi  $f'(0)$  tidak wujud.

(c) Set  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Ny}(z) < 1 \text{ dan juga } \operatorname{Kh}(z) = 0\}$  tidak terbuka. Mengapa? (100/100)

3. (a) Katakan  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ . Andalkan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Ny} \left[ \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right]$$

wujud. Tunjukkan bahawa pada titik  $z$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$  wujud dan sama.

(b) Apakah yang dimaksudkan dengan pemetaan mensebentuk? Tunjukkan bahawa di bawah pemetaan seperti ini, sudut dikekalkan dari segi magnitud dan arah dan rajah-rajah infinitesimal dipetakan kepada rajah-rajah yang serupa. Tunjukkan bahawa di bawah pemetaan  $w = e^z$ , garis-garis  $x = \text{pemalar}$  dan  $y = \text{pemalar}$  atas satah- $z$  masing-masing menjadi bulatan-bulatan dan garis-garis atas satah- $w$ .

(100/100)

4. (a) Dengan menilaikan

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{(z-a)(z-\frac{1}{a})}$$

melalui bulatan unit, tunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+a^2-2a\cos\theta)} = \frac{2\pi}{(1-a^2)}, \quad 0 < a < 1.$$

Apakah nilai kamiran jika  $a > 1$ ?

(b) Dengan mengkamirkan  $\frac{(\log_e z - \frac{1}{2}i\pi)^2}{(1+z^2)}$  melalui satu kontor yang sesuai, tunjukkan bahawa

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log_e x)^2}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi^3}{8}$$

(100/100)

5. (a) Kembangkan fungsi  $f(z) = \frac{1}{3-z}$  secara siri Taylor dalam kuasa  $(z-2i)$  dan dapatkan bulatan penumpuan. Pada rantau manakah siri ini boleh dikamirkan sebutan-demi-sebutan? Beri satu justifikasi kepada jawapan anda.
- (b) Dapatkan titik-titik singular bagi fungsi  $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z-1)}$  dan kelaskan setiap titik ini sebagai tersingkirkan, penting atau kutub peringkat tertentu. Dapatkan reja pada setiap kutub.
- (c) Biar  $f$  satu fungsi seluruh supaya  $|f(z)| \leq A|z|$  untuk semua  $z$ , dengan  $A$  satu nombor positif tetap. Tunjukkan bahawa  $f(z) = a_1z$ , dengan  $a_1$  satu pemalar kompleks. Nyatakan dengan jelas teorem-teorem yang digunakan.
- (100/100)

ooo0ooo