

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA  
Peperiksaan Semester Tambahan  
Sidang 1986/87

MAT301 - Analisis Kompleks

Tarikh: 22 Jun 1987

Masa: 9.00 pagi - 12.00 t/hari  
( 3 jam )

---

Jawab LIMA soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Tunjukkan bahawa untuk sebarang nombor kompleks  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{k=1}^n z^k = \frac{z(1-z^{n+1})}{1-z}$$

Dengan menggantikan  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , tunjukkan bahawa

$$\sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{\sin(n\theta/2)\cos((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

dan

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

(40/100)

- (b) Jika  $z^4 + 4 = (z^2 + a_1 z + 2)(z^2 + a_2 z + 2)$ , cari  $a_1, a_2$  dengan menyamakan pekali-pekali. Seterusnya, cari punca-punca ke-4 bagi nombor kompleks  $(-4)$ .

(30/100)

- (c) Katakan  $f(z)$  adalah suatu fungsi kompleks. Nyatakan, dengan memberi bukti atau contoh lawan, sama ada setiap pernyataan berikut benar atau salah.

(i) Jika  $f(z)$  adalah suatu fungsi seluruh, maka  $|f(z)|$  juga adalah suatu fungsi seluruh.

(ii) Jika  $f(z)$  adalah selanjar pada  $z_0$ , maka  $f'(z_0)$  wujud.

(30/100)

.../2

2. (a) (i) Katakan  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ,  $z = x + iy$  adalah suatu fungsi analisis pada suatu rantau  $D$ . Dengan menggunakan takrif terbitan, tunjukkan bahawa

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cari pula terbitan  $f'(z)$  dalam sebutan  $\frac{\partial u}{\partial y}$  dan  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

Deduksikan syarat-syarat Cauchy-Riemann untuk  $u$  dan  $v$ .

- (ii) Disebaliknya, jika syarat-syarat Cauchy-Riemann dipenuhi oleh fungsi-fungsi  $u$  dan  $v$  pada suatu rantau  $D$  nyatakan, tanpa memberi bukti, syarat-syarat tambahan supaya fungsi  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  adalah suatu fungsi analisis pada  $D$ .
- (iii) Cari titik-titik  $z = x + iy$  di mana terbitan  $f'(z)$  bagi fungsi  $f(z) = 2e^z + e^{\bar{z}}$  tidak wujud.
- (iv) Jika  $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ ,  $z = re^{i\theta}$ , cari  $f'(z)$  dalam sebutan  $\frac{\partial u}{\partial \theta}$  dan  $\frac{\partial v}{\partial \theta}$ .
- Jika  $z = e^{i\theta}$ , tunjukkan bahawa

$$\frac{df}{dz}(z) = -ie^{-i\theta} \frac{df}{d\theta}(e^{i\theta}).$$

(70/100)

- (b) Jika fungsi  $f(z)$  dan konjugatnya  $\overline{f(z)}$  adalah fungsi-fungsi analisis pada  $D$ , tunjukkan bahawa  $f(z)$  adalah fungsi malar pada  $D$ .

(30/100)

3. (a) Nilaikan kamilan kontur  $\int_C f(z)dz$ , jika

- (i)  $f(z) = 2z + \bar{z}$  dan  $C$  adalah tembereng garis lurus dari  $i$  ke  $1+2i$ .
- (ii)  $f(z) = x + ixy$   $\forall z = x + iy$ , dan  $C$  adalah sempadan segiempat tepat yang berbucu pada titik-titik  $0, 1, 1+i$  dan  $i$ .

(30/100)

(b) Nilai kan kamilan

$$(i) \oint_C \frac{e^{iz}}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz, \text{ di mana } C \text{ adalah bulatan } |z| = 3.$$

$$(ii) \oint_C \frac{z}{z^2 - 4} dz, \text{ di mana } C \text{ adalah bulatan } |z-2| = 1.$$

$$(iii) \oint_C \frac{\text{Log } z}{(z - 1 - i)^2} dz, \text{ di mana } C \text{ adalah bulatan } |z - 1 - i| = 1.$$

(45/100)

(c) Katakan  $C_R$  adalah suatu bulatan berpusat pada asalan dan berjajari  $R$ ,  $f(z)$  adalah suatu fungsi kompleks yang selanjat pada  $C_R$  dan  $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C_R$ . Tunjukkan bahawa

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq 2\pi MR.$$

Jika  $R > 1$ , tunjukkan bahawa

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2 + \bar{z}} \right| \leq \frac{2\pi}{R-1}.$$

(25/100)

4. (a) Nyatakan dan buktikan Teorem Taylor untuk mengembangkan fungsi analisis  $f(z)$  sebagai siri kuasa.

Dengan menggunakan Teorem Taylor, tuliskan fungsi

$f(z) = \frac{1}{z-2}$  dalam bentuk siri Taylor di sekitar titik  $z=1$ , dan nyatakan jejari terbesar  $R$  supaya kembangan itu adalah benar  $\forall |z-1| < R$ .

(30/100)

.../4

- (b) Kembangkan fungsi  $f(z) = \frac{z+2}{(z-2)(2z-1)}$  dalam bentuk siri Taylor atau siri Laurent pada domain

(i)  $0 < |z| < \frac{1}{2}$ ,

(ii)  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ ,

(iii)  $2 < |z| < \infty$ .

(45/100)

- (c) Katakan  $f(z)$  adalah suatu fungsi analisis pada  $|z| \leq 1$ . Jika  $|f(0)| < m$  dan  $|f(z)| > m \quad \forall |z| = 1$ , tunjukkan bahawa  $f(z)$  mempunyai sekurang-kurangnya suatu pensifar dalam  $|z| < 1$ .

(25/100)

5. (a) Reja suatu fungsi  $f(z)$  pada titik singular terpencil  $z_0$  yang ditandakan dengan  $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ , ditakrif sebagai

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

di mana  $C$  adalah suatu bulatan berpusat pada  $z_0$  dan  $f(z)$  adalah fungsi analisis dalam dan pada  $C$ , kecuali  $z_0$ .

- (i) Jika  $f(z)$  mempunyai kembangan Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

di sekitar titik singular terpencil  $z_0$ , tunjukkan bahawa  $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$ .

- (ii) Jika  $z_0$  adalah suatu kutub  $f(z)$  peringkat  $k \geq 1$ , tunjukkan bahawa

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

(50/100)

- (b) Nyatakan, tanpa bukti, Teorem Reja. Dengan menggunakan Teorem Reja, nilaikan

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4 - 1} dz, \text{ dimana } C = \{z : |z-i| = 1\}.$$

(25/100)

- (c) Jika  $f(z)$  adalah suatu fungsi analisis dalam dan pada bulatan  $C = \{z : |z| = 1\}$ , dan  $z_0$  adalah suatu titik dalam  $C$ , iaitu  $|z_0| < 1$ , tunjukkan bahawa

$$\oint_C \frac{(1 - z_0 \bar{z}_0) f(z)}{(z - z_0)(1 - z \bar{z}_0)} dz = 2\pi i f(z_0).$$

(25/100)

6. (a) Nyatakan dan buktikan Teorem Liouville.

Jika  $P_n(z)$  adalah suatu polinomial darjah  $n \geq 1$ , tunjukkan bahawa terdapat suatu nombor kompleks  $z_0$  di mana  $P_n(z_0) = 0$ .

(50/100)

- (b) Jika  $f(z)$  adalah suatu fungsi seluruh yang bukan fungsi malar, tunjukkan bahawa untuk sesuatu number  $z_0 \in \mathbb{C}$ , terdapat suatu jujukan  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  yang mempunyai sifat  
had  $f(z_n) \rightarrow z_0$ .  
 $n \rightarrow \infty$

(50/100)