UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan

Sidang 1987/88

MAT301 - Analisis Kompleks

Tarikh: 22 Jun 1988 Masa: 2.15 petang - 5.15 petang (3 jam)

Jawab kesemua LIMA soalan.

1. (i) Carikan bahagian nyata, khayalan dan modulus

$$\frac{1 + \cos \phi + i \sin \phi}{1 + \cos \theta + i \sin \theta}.$$

(ii) Carikan nilai-nilai

$$\left(\frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}\right)^{\frac{1}{4}}$$

dalam bentuk $a + ib$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) Jika $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha + \beta \neq 0$, buktikan bahawa

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right\} = 1.$$

Di sini Re menandakan bahagian nyata.

(iv) Melalui Teorem De'Moivre, atau cara lain, tunjukkan bahawa

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta = \frac{1}{8}(3 \cos 4\theta + 5).$$

(100/100)

2. (i) Katakan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dalam satu domain D, dengan $z \in \mathbb{C}$ dan $u, v \in \mathbb{R}$. Nyatakan dengan jelas apakah syarat perlu dan mencukupi agar f analisis dalam D.

.../2

(ii) Sebarang fungsi kompleks $f = u + iv$ dikatakan mematuhi persamaan Cauchy-Riemann jika u dan v mematuhi persamaan Cauchy-Riemann. Melalui pengiraan secara terus buktikan bahawa jika f dan g mematuhi persamaan Cauchy-Riemann, maka $f + g$ dan fg juga mematuhi persamaan Cauchy-Riemann.

(iii) Nyatakan dengan jelas apakah maksud harmonik. Adakah fungsi-fungsi berikut harmonik?

(a) $u = \tan^{-1}\left\{\frac{y - b}{x - a}\right\}$, a, b pemalar nyata dan $x \neq a$.

(b) $\phi(x, y) = \text{Im } z^{-2}$ dengan $\phi(0, 0) = 0$ dan $z \neq 0$.

Di sini Im menandakan bahagian khayalan.

(iv) Jika $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dan

$$u(x, y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy,$$

tunjukkan bahawa u harmonik dan carikan harmonik konjugat u, iaitu v.

(100/100)

3. (i) Untuk sebarang $z = re^{i\theta}$, dengan $r \neq 0$, kita takrifkan

$$\log z = \text{Log } r + i\theta,$$

dengan Log menunjukkan logaritma seperti dalam teori pembolehubah nyata, dan sudut θ adalah tidak unik. Pertama, tunjukkan bahawa

(a) $\exp(\log z) = z$, dan

(b) $\log(\exp z) = z + 2\pi ik$.

Di sini k adalah integer. Justru itu tunjukkan bahawa

$$\log z_1z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2\pi ik.$$

(ii) Berikan takrif yang sesuai untuk z^α, dengan $z, \alpha \in \mathbb{C}$. Justru itu kirakan

$$i^i,\ (1 + i)^{1+i} \text{ dan } (1 + i)^{-i}(1 + i)^i.$$

(iii) Carikan kesemua penyelesaian

$$\sin z = -i.$$

./3

(iv) Jika $w = \sinh^{-1} z$ memberi maksud bahawa $z = \sinh w$, tunjukkan bahawa

$$\sinh^{-1} z = \log[z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}].$$

(100/100)

4. (i) Jika C diberi oleh $|z| = 1$, melalui pertimbangan bahawa C dibahagi kepada dua bahagian, $x > 0$ dan $x < 0$, tunjukkan

$$\left| \int_C \frac{dz}{4 + 3z} \right| \leqslant \frac{6}{5}\pi .$$

(ii) Jika C adalah satu kontur simpel yang tertutup dalam satu rantau tertutup R, dan f analisis dan f' selanjar dalam R buktikan bahawa

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

(iii) Katakan $0 < r < R$. Melalui kamiran fungsi $\frac{R + z}{(R - z)z}$ terhadap C yang diberi oleh $|z| = r$, deduksikan bahawa

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos \theta + r^2} \, d\theta = 1.$$

(100/100)

5. (i) Nyatakan dengan jelas Toerem Reja Cauchy.
Melalui pertimbangan

$$\int_C \frac{dz}{1 + z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1 + x^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{1 + z^2}$$

dengan C_R diberi oleh $z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, atau cara lain, tunjukkan bahawa

$$\operatorname*{had}_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi.$$

.../4

(ii) Berikan maksud Nilai Prinsipal Cauchy.
Jika $a > 0$, tunjukkan bahawa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 - x^2}\, dx = \pi \frac{\sin a}{a} .$$

(100/100)

- oooOOooo -