

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1988/89
MAT261 - Teori Kebarangkalian I

Tarikh: 28 Oktober 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari
(3 jam)

Jawab KELIMA-LIMA soalan.

1. (a) Jika A, B dan C adalah tiga peristiwa di sini $P(A \cap B \cap C) \neq 0$ dan $P(C|A \cap B) = P(C|B)$, tunjukkan bahawa $P(A|B \cap C) = P(A|B)$.

(20/100)

- (b) Suatu ujian telah diberikan kepada pelajar-pelajar kelas psikologi. Ujian tersebut mengandungi 10 soalan. Enam soalan yang pertama berbentuk 'salah-benar' dan yang bakinya adalah soalan-soalan pilihan berganda, setiap soalan dengan empat pilihan.
Katakan Ani mengambil ujian tanpa sebarang persediaan dan dia hanya meneka untuk menjawab soalan-soalan tersebut.
- (i) Cari kebarangkalian bahawa dia menjawab dengan betul pada soalan-soalan yang bernombor genap sahaja.
- (ii) Andaikan Ani boleh lulus jika dan hanya jika dia betul di dalam sekurang-kurangnya 5 soalan 'salah-benar' dan juga betul di dalam sekurang-kurangnya 3 soalan pilihan berganda. Apakah kebarangkalian bahawa Ani lulus di dalam ujian tersebut.

(40/100)

- (c) Di dalam sebuah bilik terdapat kotak-kotak yang berisikan mentol lampu. 40% daripada kotak-kotak tersebut mengandungi lampu-lampu yang bermutu rendah dengan kebarangkalian akan menyala 0.8; 40% lagi mengandungi lampu-lampu yang bermutu sederhana dengan kebarangkalian akan menyala 0.9; dan bakinya mengandungi lampu-lampu yang bermutu tinggi yang pasti menyala.

- (i) Jika sebuah kotak dipilih secara rawak dan dua biji mentol lampu daripada kotak itu diuji, apakah kebarangkalian bahawa satu daripada lampu-lampu tersebut menyala.
- (ii) Jika kedua-dua biji lampu didapati menyala, apakah kebarangkalian bahawa kotak yang dipilih mengandungi lampu-lampu yang bermutu tinggi.

(40/100)

2. (a) Pembolehubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan $f(x)$ yang ditakrifkan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}a - x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x - a & , \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Tentukan nilai a supaya $f(x)$ menjadi suatu f.k.k. untuk X .
- (ii) Dapatkan $E(X)$, $\text{Var}(X)$ dan fungsi taburan longgokan untuk X .

(30/100)

- (b) Suatu pembolehubah rawak "log series" X ditakrifkan seperti yang berikut:

$$\Pr[X = r] = [-\ln(1 - \alpha)]^{-1} \left[\frac{\alpha^r}{r} \right] , \quad r = 1, 2, \dots \\ 0 < \alpha < 1$$

- (i) Tunjukkan bahawa fungsi penjana momen untuk X adalah $\frac{\ln(1 - \alpha e^t)}{\ln(1 - \alpha)}$
- (ii) Cari $E(X)$ dan $\text{Var}(X)$.

(40/100)

- (c) Katakan pembolehubah rawak X tertabur secara seragam di atas selang $(1, 5)$ dan p.r. $Y = \frac{X}{5 - X}$.
Cari fungsi taburan longgokan bagi Y dan seterusnya dapatkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi Y .

(30/100)

3. (a) Katakan pembolehubah rawak (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & , 0 < y < x < 1 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Cari

- (i) f.k.k. sut untuk X dan f.k.k. sut untuk Y .
- (ii) f.k.k. bersyarat $h_1(x|y)$.
- (iii) $\Pr(X \leq \frac{3}{4}, y \leq \frac{1}{2})$
- (iv) $\Pr(X \leq \frac{1}{2} \mid y \geq \frac{3}{4})$
- (v) Adakah X dan Y tak bersandar?

(30/100)

- (b) Katakan X_1 mempunyai min 2 dan varians 25 manakala X_2 mempunyai min 1 dan varians 16. Koefisien korelasi bagi X_1 dan X_2 adalah $\rho = 0.3$. Tentukan:

- (i) $\text{Var}(3X_1 - X_2)$
- (ii) $\rho_{X_1+X_2, X_1-X_2}$
- (iii) $\mu_{X_1 X_2}^2$

(30/100)

- (c) Katakan pembolehubah rawak $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dan f.k.k. bersyarat bagi X_2 diberi $X_1 = x_1$ adalah Binomial (x_1, p) .

- (i) Cari f.k.k. tercantum bagi X_1 dan X_2 .
- (ii) Cari f.k.k. sut bagi X_2 .
- (iii) Dapatkan $E(X_2|X_1)$.
- (iv) Dengan menggunakan (iii) dapatkan $E(X_1 X_2)$.

(40/100)

.../4

4. (a) Katakan pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-\frac{1}{2x^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Diberi $Y = \frac{1}{X}$ dan $U = Y^2$

- (i) Cari f.k.k. bagi pembolehubah rawak Y .
- (ii) Cari f.k.k. bagi pembolehubah rawak U .
- (iii) Jika diketahui U dan Y adalah p.r. tak bersandar dan $T = \frac{Y}{\sqrt{U}}$; dapatkan $E(T)$ dan $\text{Var}(T)$.

(50/100)

(b) X_1 dan X_2 adalah dua pembolehubah rawak normal piawai tak bersandar iaitu, f.k.k. sepunya untuk X_1 dan X_2 adalah berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Diberi $Y = (X_2 - X_1)^2/2$.

- (i) Dapatkan f.p.m. untuk Y .
- (ii) Katakan Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah sampel rawak saiz n daripada suatu populasi yang mempunyai taburan secaman dengan f.k.k. Y .
Terbitkan taburan bagi $U = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ dan camkan bentuk taburan U .

(50/100)

5. (a) P.r. bivariat (X, Y) tertabur secara seragam atas segiempat sama dengan bucu-bucu pada $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$ dan $(1, -2)$.

- (i) Cari f.k.k. tercantum bagi $U = X + Y$ dan $V = X - Y$.
- (ii) Adakah U dan V saling tak bersandar.

(30/100)

- (b) Katakan $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_5$ menandakan statistik tertib bagi suatu sampel rawak yang bersaiz 5 daripada suatu taburan dengan f.k.k.:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa $Z_1 = Y_2$ dan $Z_2 = Y_4 - Y_2$ adalah saling tak bersandar.

(30/100)

- (c) Dua pembolehubah rawak tak bersandar, X_1 dan X_2 mempunyai f.k.k. sepunya, iaitu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & , \quad x \geq 0, \beta > 0 \\ 0 & , \quad \text{di tempat lain} \end{cases}$$

- (i) Cari f.k.k. untuk $Y = X_1 - X_2$ dan $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

(ii) Dapatkan f.k.k. sut bagi Y.

(iii) Dapatkan f.k.k. sut bagi Z.

(40/100)