

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MAT 261 Teori Kebarangkalian I

Masa : [3 jam]

Jawab KELIMA-LIMA soalan.

1. (a) Katakan A, B dan C adalah tiga peristiwa.
Tunjukkan bahawa

(i) jika $(A \cap B) \subset C$ maka $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(ii) jika B dan C adalah saling tak bersandar maka

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C) + P(A|B \cap \bar{C}) \cdot P(\bar{C})$$

(30/100)

(b) Sebuah pasaraya dibekali dengan 60% mentol lampu daripada pengusaha A dan bakinya daripada pengusaha B. Diketahui mentol lampu daripada A 6% rosak dan daripada B 9% rosak. Didapati juga daripada A kadar kesilapan melabel mentol rosak adalah 3% manakala kesemua lampu daripada B dilabel dengan betul.

(i) Apakah kebarangkalian bahawa tiga biji lampu yang dipilih daripada A kesemuanya baik dan betul dilabel.

Katakan lampu-lampu daripada A dan B dicampurkan.
Tiga biji lampu dipilih secara rawak daripada lot tersebut.
Apakah kebarangkalian bahawa

(ii) terdapat tepat 2 biji lampu yang rosak.

(iii) kesemuanya rosak dan dilabel betul adalah lampu-lampu daripada pengusaha A.

(40/100)

...2/-

- (c) Seorang kanak-kanak terjumpa sebuah beg yang mengandungi 4 biji epal, 3 biji pisang dan 2 biji betik. Dia memilih sebiji buah secara rawak daripada beg tersebut dan memakannya. Ini dilakukan sehingga dia terpilih semula buah yang sama seperti yang dimakan sebelumnya. Buah itu dibuang bersama dengan beg dan baki kandungannya.

(i) Dapatkan taburan kebarangkalian bagi bilangan buah yang dimakan.

(ii) Berapa biji buah yang dia dijangka makan.

(30/100)

2. (a) Katakan pembolehubah rawak X mempunyai taburan kebarangkalian berikut:

$$P(X = 0) = \lambda$$

$$P(X = n) = \lambda \frac{k(k+1) \dots (k+n-1)}{n!} a^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$0 < a < 1$$

(i) Tunjukkan bahawa $\lambda = (1 - a)^k$

(ii) Dapatkan fungsi penjana momen bagi X

(iii) Tentukan $E(X)$ dan $V(X)$

(30/100)

- (b) Suatu p.r. X mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{3}{8}, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{8}, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tentukan

(i) $P\left(X > 0 \mid |X| < \frac{3}{2}\right)$

(ii) fungsi taburan longgokan bagi $Y = |X|$ dan seterusnya cari fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi Y .

(40/100)

...3/-

(c) Andaikan diketahui bahawa bilangan item yang dihasilkan oleh sebuah kilang di dalam seminggu adalah suatu pembolehubah rawak dengan min 500.

(i) Tentukan suatu batas bagi pengeluaran minggu ini melebihi 1000.

(ii) Jika varians bagi pengeluaran seminggu ialah 100. Dapatkan suatu batas bagi pengeluaran pada suatu minggu berada di antara 400 dan 600.

(30/100)

3. (a) Katakan pembolehubah rawak (X, Y) mempunyai f.k.k. tercantum.

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & |x| < y \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \end{cases}$$

Tentukan

(i) nilai c

(ii) $P(Y - X \leq 1)$

(iii) $Kov(X, Y)$
Adakah X dan Y tak bersandar.

(50/100)

(b) Jika fungsi ketumpatan tercantum bagi p.r. (X, Y) adalah

$$f(x, y) = \begin{cases} p^2 q^{y-2}, & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & y = x + 1, x + 2, \dots \\ & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tentukan

(i) f.k.k. sut masing-masing bagi X dan Y

(ii) f.k.k. bersyarat Y diberi X

(iii) $E(E(Y|X))$

(50/100)

4. (a) Pembolehubah rawak (X_1, X_2) mempunyai f.k.k. tercantum berikut.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & , \text{ di tempat lain} \end{cases}$$

Katakan $Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$ dan $Y_2 = X_1X_2$

Tentukan

- (i) f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2
- (ii) f.k.k. sut masing-masing bagi Y_1 dan Y_2
- (iii) Adakah Y_1 dan Y_2 tak bersandar.

(50/100)

- (b) Pembolehubah rawak X mempunyai f.k.k. berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & x > \alpha \quad \alpha > 0 \quad \beta > 0 \\ 0 & , \quad x \leq \alpha \end{cases}$$

- (i) Tentukan f.k.k. bagi $Y = \ln\left(\frac{X}{\alpha}\right)$
- (ii) Katakan Y_1, Y_2, \dots, Y_n adalah suatu sampel rawak saiz n daripada suatu populasi yang mempunyai taburan secaman dengan f.k.k. Y . Dapatkan taburan bagi $S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ dan camkan bentuk taburan S .
- (iii) Diberi $T = \frac{2}{\beta} S$.
Dapatkan f.p.m. bagi p.r. T dan nyatakan taburan T .

(50/100)

...5/-

5. (a) Katakan X dan Y adalah sebarang dua pembolehubah rawak.

(i) Tunjukkan bahawa

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}[E(Y|X)]$$

(ii) Jika X dan Y tak berkorelasi, tunjukkan bahawa

$$\text{Kov}[(X + Y), (X - Y)] = V(X) - V(Y)$$

(50/100)

(b) Katakan X dan Y adalah dua p.r. yang tak bersandar dan setiap p.r. mempunyai f.k.k. sepunya iaitu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

(i) Tentukan taburan bagi $U = \frac{(X - Y)^2}{2\sigma^2}$

(ii) Tentukan taburan bagi $V = X^2 + Y^2$ dan taburan bagi $T = 4\sigma^2V$

(iii) Katakan U dan T adalah saling tak bersandar dan $W = U + T$, dapatkan $E(W^2)$.

(50/100)