

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT 261 Teori Kebarangkalian I

Masa : [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andaikan p.u.r. X mempunyai f.k.k.

$$f(x) = ce^{-x}, \quad x > 0 \\ = 0 \quad \text{d.t.l.}$$

- (i) Dapatkan nilai c .
- (ii) Dapatkan fungsi taburan bagi X .
- (iii) Dapatkan nilai median bagi taburan ini.
- (iv) Dapatkan pula nilai c jika f.k.k. bagi X adalah seperti berikut:

$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(60/100)

- (b) Sebiji kotak mengandungi 4 biji bola yang bernombor 1, 2, 3 dan 4. Sebiji bola diambil secara rawak daripada kotak tersebut. Andaikan kita takrifkan peristiwa A sebagai suatu peristiwa yang mempunyai bola bernombor 1 dan 2, peristiwa B mempunyai bola bernombor 1 dan 3 dan peristiwa C mempunyai bola bernombor 1 dan 4, iaitu secara ringkasnya, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ dan $C = \{1, 4\}$.

- (i) Tunjukkan bahawa $P(A) = P(B) = P(C)$.
- (ii) Tunjukkan bahawa kesemua pasangan peristiwa ini adalah tak bersandar, iaitu $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ dan seterusnya.
- (iii) Tunjukkan pula bahawa ketiga-tiga peristiwa ini adalah bersandar.

(40/100)

.../2

2. (a) Andaikan bahawa f.k.k. tercantum bagi X dan Y dijadualkan seperti berikut

x y	1	2
1	0.5	0.1
2	0.1	0.3

- (i) Dapatkan suatu jadual bagi f.k.k. sut bagi Y.
 (ii) Hitung $P(XY \leq 3)$ dan $P(X + Y > 2)$.
 (iii) Hitung $P(X = 1 | Y = 1)$.

(50/100)

- (b) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai dua p.u.r. tak bersandar, masing-masing dengan min μ_1 dan μ_2 dan varians σ_1^2 dan σ_2^2 .

- (i) Dapatkan min dan varians bagi $Y = X_1 X_2$.
 (ii) Jika $Y = X_1 + X_2$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{7}{2}$ dan $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{35}{12}$, dapatkan $E[Y]$ dan $\text{Var}(Y)$.
 (iii) Jika X_1 dan X_2 mempunyai f.k.k. yang sama, iaitu,

$$f(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \dots, 6,$$

dapatkan fungsi penjana momen bagi $Y = X_1 + X_2$.

(50/100)

3. (a) F.k.k. tercantum bagi X dan Y ialah

$$f(x, y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi X diberikan $Y = y$.

.../3

- (ii) Tunjukkan $E[X | Y = y] = y$.
- (iii) Apakah taburan bagi X diberikan $Y = \beta$.

(50/100)

- (b) Andaikan p.u.r. X mempunyai taburan gamma dengan parameter α dan $\beta = 1$. F.k.k. bagi X ialah

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0$$

$$= 0 \quad \text{d.t.l.}$$

- (i) Dapatkan fungsi penjana momen, $m(t)$, bagi X.
- (ii) Katakan X_1, X_2, \dots, X_n adalah n p.u.r. tak bersandar, masing-masing mempunyai f.k.k. seperti di dalam bahagian (i). Jika $Y = X_1 + \dots + X_n$, dapatkan f.k.k. bagi Y.

(50/100)

- 4. (a) Andaikan X_1, X_2, \dots, X_n sebagai suatu sampel rawak daripada suatu taburan dengan f.p.m., $m(t)$. Tunjukkan bahawa

- (i) f.p.m. bagi $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ialah $[m(t)]^n$ dan

- (ii) f.p.m. bagi $\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ ialah $\left[m\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$.

(30/100)

- (b) Jika $E[X] = 17$ dan $E[X^2] = 298$, dapatkan suatu batas bawah bagi $P(10 < X < 24)$.

(20/100)

- (c) Andaikan X_1 dan X_2 sebagai 2 p.u.r. tak bersandar yang tertabur secara normal piawai. Jika $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = X_1 - X_2$, dapatkan f.k.k. tercantum bagi Y_1 dan Y_2 dan tunjukkan bahawa Y_1 dan Y_2 adalah tak bersandar.

(50/100)

.../4

5. (a) Pertimbangkan fungsi taburan bagi X, F(x) berikut:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x < 0 \\ &= x^2 & 0 \leq x < 1 \\ &= 1 & 1 \leq x \end{aligned}$$

- (i) Lukiskan graf bagi F(x).
(ii) Dapatkan $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right)$ dan $P\left(\frac{1}{4} \leq X < 2\right)$.
(iii) Dapatkan f.k.k. bagi X.

(30/100)

- (b) Andaikan X mempunyai taburan seragam di dalam selang (0, 1) dan $Y = a + (b - a)X$. Dapatkan f.k.k. bagi Y.

(20/100)

- (c) Jika X dan Y mempunyai f.k.k. tercantum

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\beta^2} e^{-(x+y)/\beta}, & x > 0, y > 0, \beta > 0 \\ &= 0 & \text{d.t.l.} \end{aligned}$$

dapatkan f.k.k. tercantum bagi $U = \frac{X - Y}{2}$ dan $V = Y$. Dapatkan juga f.k.k. sut bagi U.

(50/100)

- oooOOooo -