

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAT220 - Persamaan Pembezaan 1

Tarikh: 2 November 1988

Masa: 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Selesaikan

(i)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{-y^2} - 2xy},$$

tertakluk kepada $y = 0$ bila $x = 1$.

(ii)
$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy \frac{dy}{dx} = x^2 + xy - 3y^2.$$

(b) Jika satu penyelesaian persamaan Riccati

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2 \quad \dots (*)$$

ialah $y_1 = y_1(x)$, penyelesaian am persamaan (*) boleh
diberi oleh $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$. Tunjukkan u mematuhi

$$\frac{du}{dx} = -(q_2 + 2q_3 y_1)u - q_3.$$

Justru itu carikan penyelesaian am persamaan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2, \quad \text{jika diberi } y_1(x) = -\frac{1}{x}.$$

(100/100)

2. (a) Selesaikan

(i)
$$y'' - y' - 12y = 0$$

(ii) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(iii) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

(b) $y_1(x) = e^{-3x}$ adalah salah satu penyelesaian untuk $y'' + 5y' + 6 = 0.$

Jika $y_2(x)$ adalah penyelesaian keduanya dan $W(y_1, y_2)(x) = e^{-5x}$, carikan $y_2(x).$

(100/100)

3. Persamaan

$P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ (i)

dikatakan tepat jika ia boleh dibentuk sebagai

$\frac{d}{dx} \left\{ P(x) \frac{dy}{dx} + f(x)y \right\} = 0$, (ii)

dengan $f(x)$ sebagai satu fungsi yang perlu dicari. Tunjukkan $\frac{df}{dx} = R$ dan $f = Q - \frac{dP}{dx}$. Justru itu tunjukkan bahawa syarat perlu agar Pr.(i) menjadi tepat ialah

$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} + R = 0$ (iii)

Tunjukkan

$x \frac{d^2y}{dx^2} + (2 + x) \frac{dy}{dx} + y = 0$, $x > 0$ (iv)

adalah tepat. Dari kaedah di atas, atau cara lain, selesaikan (iv). Apakah nilai y apabila $x \rightarrow \infty$?

(100/100)

4. Jika $z = x^3 y$, dengan $z = z(x)$ dan $y = y(x)$, carikan $\frac{dz}{dx}$ dan $\frac{d^2z}{dx^2}$ dalam sebutan x , $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$. Justru itu transformasikan persamaan

$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2(3+x) \frac{dy}{dx} + x(6 + 6x + 5x^2)y = 4(1+x)e^{-x}$ (i)

kepada satu bentuk yang lebih mudah, iaitu dalam bentuk

$z'' = f(x, z, z')$ (ii)

Di sini $x > 0$.

Melalui persamaan (ii), atau cara lain, selesaikan (i) tertakluk kepada

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-3} e^{-\frac{\pi}{4}} \left(2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-3} e^{-\frac{\pi}{2}} \left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

(100/100)

5. Carikan penyelesaian am persamaan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x}(t),$$

dengan $\underline{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$. Justru itu selesaikan

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \sqrt{6} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

(100/100)

- ooo00ooo -