UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT 220 Persamaan Pembezaan I

Masa : [jam]

Jawab SEMUA soalan.

1. (a) Selesaikan persamaan-persamaan berikut:

(i) $y' + y = 0$,

(ii) $y' = (x + y)^2$,

(iii) $(3x + 2y + 3)dx - (x + 2y - 1)dy = 0$,

(iv) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$.

(50/100)

(b) Pertimbangkan persamaan homogen

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0.$$

Dapatkan dua faktor pengamir $F_1(x, y)$ dan $F_2(x, y)$ yang tak bersandar secara linear bagi persamaan tersebut dan tunjukkan bahawa

$$\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} = c, \qquad c \text{ pemalar sebarangan,}$$

adalah penyelesaian am bagi persamaan tersebut.

(25/100)

(c) Carikan dua penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = \frac{1}{2}\left[-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}\right] ; \quad y(2) = -1.$$

Adakah ini bercanggah dengan teorem keunikan?
Terangkan.

(25/100)

...2/-

2. Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' = 1 - x + y \; ; \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Cari penyelesaian tepat $y(x)$.

(15/100)

(b) Tunjukkan bahawa kaedah berangka Euler untuk masalah tersebut boleh ditulis sebagai

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - x_0) + x_n$$

(30/100)

(c) Pertimbangkan suatu titik tetap $x > x_0$, dan bagi setiap n yang diberikan, kita pilih

$$h = \frac{(x - x_0)}{n}.$$

Maka bagi setiap n, $x_n = x$. Tunjukkan bahawa

$$\operatorname*{had}_{n\to\infty} y_n = y(x)$$

[y_n seperti diberi dalam (b), dan $y(x)$ dalam (a)].

(25/100)

(d) Katakan $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ dan $h = 0.1$. Gunakan Kaedah Euler Diperluas untuk mencari penghampiran bagi $y(0.2)$.

(30/100)

3. (a) Selesaikan persamaan-persamaan berikut:

(i) $y'' - y' + y = 0$,

(ii) $x^2y'' - 2y = 0$.

(30/100)

...3/-

(b) Selesaikan persamaan -persamaan berikut:

(i) $y'' + 4y' + 4y = \sin x + e^{-2x} + x$,

(ii) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$.

(30/100)

(c) Jika $y = \phi(x)$ adalah penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y'' + ay' + by = 0 \; ; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

[Di sini, koefisien-koefisien a dan b adalah pemalar], tunjukkan bahawa suatu penyelesaian khusus bagi persamaan tak homogen

$$y'' + ay' + by = R(x)$$

ialah

$$y_p(x) = \int_c^x \phi(x - t)R(t)dt$$

bagi sebarang tetapan c. Pada khususnya, jika persamaan cirian $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ mempunyai dua punca yang sama, katakan $\lambda_1 = \lambda_2 = m$, tunjukkan bahawa rumus bagi $y_p(x)$ menjadi

$$y_p(x) = e^{mx} \int_c^x (x - t)e^{-mt}dt.$$

(40/100)

(a) Selesaikan persamaan

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 + xy + y^2)\frac{dy}{dx} + x^2 + xy = 0.$$

(20/100)

(b) Selesaikan persamaan

$$y'' + (y')^2 = 1.$$

(20/100)

...4/-

(c) Selesaikan persamaan Ricatti

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2.$$

[Petunjuk: Dapatkan suatu penyelesaian khusus dalam bentuk $y = x^m$].

(20/100)

(d) Gunakan kaedah perubahan parameter untuk mencari suatu penyelesaian khusus bagi sistem tak homogen dan seterusnya dapatkan penyelesaian amnya:

$$\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{x} + \begin{pmatrix} e^{\pi t} \\ 3e^{\pi t} \end{pmatrix}.$$

(40/100)

- oooOooo -