

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

PEPERIKSAAN SEMESTER TAMBAHAN
SIDANG AKADEMIK 1993/94

MAT 220 - Persamaan Pembezaan I

Masa: 3 Jam

Jawab SEMUA soalan.

1(a) Selesaikan persamaan-persamaan yang berikut:

(i) $y' + y = 0$

(ii) $(3x + 2y + 3) dx + (x + 2y - 1) dy = 0$

(iii) $y' + \frac{1}{x+1} y = y^{1/2}$

(iv) $(x + 1)(y' - 1) = 2(y - x)$

(v) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 2xy \frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0$

(40/100)

(b) Cari suatu persamaan pembezaan peringkat kedua yang mewakili keluarga bulatan yang berpusat di atas garis $y = 1$.

(15/100)

- (c) Cari trajektori ortogon bagi keluarga bulatan

$$x^2 + y^2 = 2by$$

di mana b adalah suatu pemalar sebarang.

(15/100)

- (d) Pertimbangkan masalah nilai awal

$$y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 1$$

- (i) Tunjukkan bahawa $y(x) = e^x$ adalah penyelesaian unik bagi masalah nilai awal tersebut.
- (ii) Gunakan kaedah penghampiran berturut-turut Picard, bermula dengan $y_1(x) = 1$. Dapatkan $y_n(x)$ secara tak tersirat dan tunjukkan bahawa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$$

bagi semua x .

(30/100)

- 2(a) Selesaikan persamaan-persamaan yang berikut:

- (i) $y'' + 2y' = 0$
- (ii) $y'' + 2y' + 2y = 0$
- (iii) $y'' + 2y' + y = 0$
- (iv) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$
- (v) $x^2y'' + 2xy' + y = 0$

(40/100)

- (b) Cari suatu penyelesaian khusus bagi persamaan

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos 2x$$

(15/100)

- (c) Cari penyelesaian am bagi persamaan

$$x^3 y'' + xy' - y = e^{1/x}, \quad x > 0$$

[Petunjuk: $y = x$ adalah suatu penyelesaian bagi persamaan homogen
 $x^3 y'' + xy' - y = 0$]

(25/100)

- (d) Katakan
- y_1
- ,
- y_2
- dan
- y_3
- adalah tiga penyelesaian bagi persamaan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

pada selang I . Jika dimensi ruang vektor yang direntangkan oleh
 $S = \{y_1 - y_2, y_1 - y_3, y_2 - y_3\}$ lebih besar dari satu, berikan suatu
kaedah untuk mendapatkan penyelesaian bagi masalah nilai awal berikut:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) ; y(x_0) = a, y'(x_0) = b$$

 $x_0 \in I.$

(20/100)

- 3(a) Tukarkan persamaan peringkat kedua

$$y'' - 3y' + 2y = \sin t + e^t$$

kepada suatu sistem persamaan peringkat pertama. Seterusnya selesaikan sistem
persamaan yang didapati ini.

(40/100)

- (b) Pertimbangkan persamaan homogen

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

di mana $Mx + Ny \neq 0$. Jika $F(x,y)$ adalah suatu faktor pengamir yang tak bersandar secara linear dengan fungsi $\frac{1}{Mx + Ny}$, tunjukkan bahawa

$F(x,y) (Mx + Ny) = C$, C pemalar sebarang, ialah penyelesaian am bagi persamaan homogen tersebut.

(40/100)

- (c) Selesaikan sistem persamaan

$$X_1' = X_1 - X_2 + 4X_3$$

$$X_2' = 3X_1 + 2X_2 - X_3$$

$$X_3' = 2X_1 + X_2 - X_3$$

(20/100)