UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT 202 - PENGANTAR ANALISIS

Masa : 3 jam

Jawab kesemua EMPAT (4) soalan.

1. (a) Suatu hubungan H ditakrifkan atas $\mathbb{R}$ sebagai

$$x \, H \, y \Leftrightarrow x - y \text{ terbahagikan oleh } 4 \,,$$

$$x, y \, \varepsilon \, \mathbb{R}.$$

Tentukan sama ada H adalah refleksif, simetri dan transitif.

Cari [0] H.

(b) Buktikan bahawa supremum bagi suatu set S, jika wujud, adalah unik.

(c) $A \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ adalah selanjar secara seragam. Jika A terbatas, tunjukkan bahawa f(A) terbatas juga.

Berikan satu contoh untuk menunjukkan bahawa keputusan di atas tidak benar lagi jika f hanya suatu fungsi yang selanjar tetapi tidak selanjar secara seragam.

(100/100)

2. (a) Di dalam $A_n = \left[2 + \frac{(-1)^n}{n}, n^2\right), \; n \, \varepsilon \, N.$

Cari $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

.../2

(b) Diberi $b > a > 0$. Tunjukkan bahawa terdapat suatu nombor tak nisbah u supaya

$$\frac{1}{b^2} < \frac{u}{3} < \frac{1}{a^2} .$$

(c) Jujukan $\{x_n\}$ ditakrifkan sebagai

$$x_1 = 1,$$

$$x_{n+1} = 2x_n + 1, \ n \geq 1 .$$

Tunjukkan bahawa $\lim_{n \to \infty} x_n$ tak wujud.

(d) Fungsi-fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $\mathbb{R}$ dan $f(a) < g(a)$ di mana $a \in \mathbb{R}$ adalah suatu titik yang tetap. Tunjukkan bahawa wujud suatu kejiranan U bagi a supaya

$$f(x) < g(x) \ , \ \forall x \in U.$$

(100/100)

3. (a) Buktikan bahawa tak wujud sebarang nombor nisbah x supaya $x^2 = 7$.

(b) Katakan $A = (5, 8] \cup \{3 + \frac{1}{n} \mid n \in N\}$.

(i) Cari sup A dan inf A, jika wujud.

(ii) Cari semua titik had bagi A.

(iii) Cari semua titik pedalaman bagi A.

(iv) Adakah set A tertutup? Mengapa?

(v) Cari set tertutup yang terkecil yang mengandungi A.

.../3

(c) Katakan A adalah sebarang subset $\mathbb{R}$.

(i) Buktikan bahawa $(A^p)^o \subseteq (A^o)^p$

(ii) Adakah $(A^p)^o = (A^o)^p$?

Buktikannya jika ia benar, sangkalkannya dengan memberi satu contoh jika ia tidak benar.

(100/100)

4. (a) (i) Katakan A adalah suatu set yang tak terbilangkan dan $B \subseteq A$ adalah suatu subset yang terbilangkan.
Tunjukkan $A \setminus B$ adalah tak berbilangkan.

(ii) Jika set $P = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \varepsilon N \right\}$, tentukan sama ada set $R \setminus P$ adalah terbilangkan atau tak terbilangkan.

(b) Tunjukkan bahawa siri fungsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n (2x + 1)}{(n + 1)^4}$$

menumpu secara seragam pada $\mathbb{R}$.

(c) Katakan $R^+ = \{ x \varepsilon R \mid x > 0 \}$
dan fungsi $f : R^+ \to R$ ditakrifkan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \varepsilon R^+ \cap Q \\ 0, & x \varepsilon R^+ \setminus Q \end{cases}$$

Buktikan bahawa fungsi f tidak selanjar pada sebarang $x > 0$.

(100/100)

- ooo000ooo -