

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

MAT 201 Kalkulus Lanjutan

Masa : [3 jam]

Jawab SEMUA soalan. Tunjukkan semua jalankerja.

1. (a) Diberi $z = xy \tan\left(\frac{y}{x}\right)$, tunjukkan bahawa

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 2z \quad \text{untuk } (x, y) \neq (0, 0)$$

- (b) Diberi $dw = 4x dy + (x^4 + y^4)dz$ dan $z = \ln(x^4 + y^4)$.

Cari $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_z$ dan $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$

- (c) Tentukan $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ wujud atau tidak jika

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Jika wujud, buktikan dengan takrif $\varepsilon - \delta$.

- (d) Tentukan sama ada siri-siri berikut menumpu atau mencapah. Bagi siri selang seli, tentukan sama ada ia menumpu secara mutlak, bersyarat atau mencapah.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2 - 7}{e^n(n+2)^2}$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n^2 + 1)^{4/3}}$

...2/-

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

(100/100)

2. (a) Uji penumpuan kamiran tak wajar berikut:

$$(i) \int_0^3 \frac{\sin x}{x^3} dx$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+3)}} dx$$

(b) Diberi $u + 3v + 2w = x + 2y + 10$
 $u^2 + 3v^2 - w^2 + e^x - e^{2y} + 2 = 0$

Cari $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{v,w}$ dan $\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u,w}$.

(c) (i) Kelaskan jenis titik-titik genting bagi fungsi ini

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 2x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(ii) Cari nilai-nilai ekstremum bagi fungsi f ini pada rantau membulat
 $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(d) Diberi f suatu fungsi yang terbezakan. Tunjukkan bahawa

$$f(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f^{(2)}(a)x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f^{(3)}(t) dt$$

di sini $a \in \mathbb{R}$

(100/100)
...3/-

3. (a) (i) Tuliskan rumus siri Taylor bagi suatu fungsi f di sekitar titik $x = a$.
(ii) Tunjukkan bahawa siri Maclaurin bagi

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \text{ ialah } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

(iii) Dengan siri ini, tuliskan satu siri bagi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(iv) Dengan menggunakan keputusan ini, nyatakan $g(x) = \tan^{-1}x$ sebagai satu siri kuasa dalam x dan seterusnya buktikan bahawa

$$\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2n+1} = \frac{\pi}{3}$$

(b) Diberi $\int_D \int \frac{x+y}{xy} dA$, D ialah rantau yang dibatasi oleh $x^2 = y$ dan

$x = y^{1/3}$. Nilaikan kamiran tersebut dengan membina kamiran dalam tertib

(i) $\iint f(x, y) dx dy$

(ii) $\iint f(x, y) dy dx$.

(c) Katakan V menyukat isipadu bongkah yang dibatasi oleh kon $z^2 = x^2 + y^2$ dan silinder $x^2 + y^2 = 2x$. Nilaikan kamiran berlelar $\iint f(r, \theta) dr d\theta$ yang mewakili V .

(d) Nilaikan kamiran berikut dengan menggunakan koordinat sfera.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

Lakarkan domain kamirannya.

(100/100)

...4/-

4. (a) Nilai kan had-had berikut, jika wujud.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n^2 \cos \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + n^2}{4^n}$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^3}{n}$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{n^2 - 4n + 1}$

(b) Jika $w = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, tunjukkan bahawa

$$zw_x + yw_y + zw_z = 0.$$

(c) Cari jejari dan selang penumpuan bagi siri

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - \pi)^k}{(\pi/2)^k}$$

(d) Katakan $u = f(x, y)$ dan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Tunjukkan bahawa jika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ maka}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

(100/100)