UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

MAT201 Kalkulus Lanjutan

Masa: [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Tekanan T, isipadu I dan suhu S bagi suatu gas dihubungkan oleh Hukum Gas

$$TI = pS, \text{ p suatu pemalar .}$$

Jika $T = 0.5\ gm/cm^2$ apabila $I = 64\ cm^3$ dan $S = 80^\circ$ anggarkan perubahan dalam T jika I dan S masing-masing berubah kepada 70 cm^3 dan 76°.

(10/100)

(b) Uji penumpuan siri di bawah:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{(k+1)}{k}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n!}{n^n}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{(n^2+2)^n}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n^2}{n^2+1}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - \text{kos } n}$

(vi) $e + \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{27} + \frac{e^4}{64} + \ldots$

(30/100)

(c) (i) Tentukan sama ada $\displaystyle\text{had}_{(x,y)\to(o,o)} f(x,y)$ wujud atau tidak jika

$$f(x,y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

(10/100)

...2/

(ii) Gunakan takrif had untuk membuktikan

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \text{ wujud jika}$$

$$f(x,y,z) = \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(20/100)

(d) Diberi $u = e^{2x+y} \text{ kos } (2y - x)$ dan

$$x = 2s^2 - t^2$$

$$y = s^2 + 2t^2$$

Cari $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_t$ dan $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$.

(15/100)

(e) Buktikan bahawa jika $\{b_n\}_{n=1,2,\ldots}$ suatu jujukan yang menumpu kepada B dan $B \neq 0$, maka wujud suatu nombor positif nyata M dan integer positif N yang apabila $n \geq N$ akan mengimplikasikan $|b_n| \geq M$.

(15/100)

2. (a) (i) Katakan $f(x,y) = \begin{cases} (xy)\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{jika } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & \text{jika } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tunjukkan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ tidak selanjar pada (0,0).

(20/100)

(ii) Diberi $e^x w + e^4 v - wv = 2$,
$y w + vx + \sin y = 2$

Dapatkan $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_v$ dan $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_w$

(20/100)

.../3

(iii) Jika f fungsi yang terbezakan dalam pembolehubah u dan v dengan $u = x - y$ dan $v = y - x$, buktikan

$z = f(x - y, y - x)$ memenuhi persamaan

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0.$$

(10/100)

(b) (i) Suhu S darjah di sebarang titik (x,y) pada garislengkung $4x^2 + 12y^2 = 1$ diberikan sebagai $S = 4x^2 + 24y^2 - 2x$. Cari titik-titik di atas garislengkung itu yang suhunya terpanas dan tersejuk. Cari juga suhunya pada titik-titik ini.

(20/100)

(ii) Dapatkan titik-titik genting bagi

$$f(x,y) = \frac{2x + 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

dan seterusnya tentukan sama ada f mempunyai nilai ekstremum pada titik-titik ini.

(30/100)

3. (a) Tunjukkan $\displaystyle\int_0^x te^t dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!\,(n+2)}$.

Seterusnya, buktikan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} = \frac{1}{2}$.

(10/100)

(b) (i) Tukarkan kamiran $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} dzdydx$

kepada tertib $\displaystyle\iiint dy\,dz\,dx$

.../4

(ii) Tukarkan kamiran $\int_0^3 \int_{-\sqrt{4-y}}^{y-2} dxdy + \int_3^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} dxdy$

kepada tertib $\int\int dy\,dx$.

(iii) Nilaikan $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} y\, e^z\, dzdxdy$

(20/100)

(c) (i) Dapatkan $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \text{kos}\,\frac{1}{n}\right)$ (had)

(ii) Cari $\text{had}_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$

(iii) Jika $\text{had}_{n\to\infty} \left(\frac{kn+1}{kn-1}\right)^n = 9$, cari k.

(35/100)

(d) Tentukan sama ada kamiran tak wajar berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\int_0^1 x^{-3/2} e^{x^{-1/2}} dx$

(ii) $\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx$

(iii) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p} dx$, p pemalar

(35/100)

.../5

4. (a) (i) Katakan $f \in C^2(\mathbb{N}^2)$ dan

$u = f(x,y)$, $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$

Buktikan

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2 y}{d\theta^2}$$

(20/100)

(ii) Katakan z ialah fungsi dalam x dan y.

Jika $z = (x^2 + y^2)\sin xz$, dapatkan $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$.

(10/100)

(b) (i) Dengan menggunakan koordinat sfera nilaikan $\iiint_S xyz\, dV$ jika S ialah pepejal dalam oktan yang pertama yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dan satah-satah koordinat xz dan zy.

(20/100)

(ii) Katakan R rantau yang dibatasi oleh bulatan $x^2 + y^2 = a^2$. Nilaikan $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

jika ditakrifkan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \underset{a\to\infty}{\text{had}} \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

(20/100)

.../6

(iii) Jika menggunakan kaedah lanjutan boleh dibuktikan

bahawa $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy.$$

Gunakan keputusan ini dan bahagian (ii) untuk membuktikan $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

(10/100)

(c) Katakan $y = J_o(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n!)^2\, 2^{2n}}$.

(i) Tentukan jejari penumpuan dan selang penumpuan bagi $J_o(x)$.

(ii) Tunjukkan $y = J_o(x)$ ialah penyelesaian persamaan $xy'' + y' + xy = 0$.

(20/100)

- ooo00ooo -