

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA
 Peperiksaan Semester Tambahan
 Sidang 1988/89
 Jun 1989
MAT201 - Kalkulus Lanjutan
 Masa: [3 jam]

Jawab LIMA soalan.

1. (a) Tentukan sama ada jujukan $\{a_n\}$ berikut menumpu atau mencapah.

Jika menumpu cari hadnya

(i) $a_n = \frac{4n^2 + 2n}{5n^2 - 3}$ (ii) $a_n = \sin\left(\frac{n+3}{2n^2+1}\right)$

- (b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ (ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2n}$ (iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

- (c) Cari selang penumpuan bagi siri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

- (d) Jika $\text{Had}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell, \ell < 1$, maka $\sum a_n$ menumpu. Buktikan.

(100/100)

2. (a) Diberi $z^3 + xz - y^2 = 1$.

Cari $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$ dengan menganggapkan $z = z(x,y)$.

.../2

- (b) Katakan $u = 3x^2 - y^2$, dan $x = 2s + 7t$, $y = 5st$,
cari $\frac{\partial u}{\partial t}$ dan $\frac{\partial u}{\partial s}$ dalam sebutan yang melibatkan s dan t sahaja.

- (c) Cari setiap titik genting bagi

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Tentukan sama ada ia titik maksimum tempatan atau minimum tempatan atau titik pelana.

- (d) Tentukan sama ada kamiran

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

menumpu. Jika menumpu cari nilainya.

- (e) Buktikan bahawa $\text{Had}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

(100/100)

3. (a) Nilaikan

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (e^y + \sin x) dx dy.$$

- (b) Cari isipadu bagi bungkah di bawah permukaan $z = 4 - x^2 - y$ dan di atas segiempat

$$R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}.$$

- (c) Dengan menukarkan tertib pengkamiran, nilaikan

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} dy dx .$$

- (d) Tunjukkan bahawa

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$$

menumpu jika $p < 1$ dan mencapah jika $p \geq 1$.

(100/100)

4. (a) Lakarkan graf bagi

$$r = 2 + \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Carikan luas kawasan yang terkandung di dalamnya.

(b) Dengan menggunakan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, |x| < 1,$$

dapatkan $\ln(1+x)$ dan seterusnya dapatkan $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dan $\ln 3$.

(c) (i) Dapatkan pembeza seluruh dz jika $z = x^3 + y^3 - 2xy$. Jika nilai x berubah dari 2 ke 1.9 dan nilai y berubah dari 3 ke 3.1, anggarkan perubahan Δz dengan pembeza seluruh.

(ii) Dapatkan anggaran terbaik bagi $\cos \frac{6\pi}{7} \sin \frac{\pi}{5}$.

(d) Jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, dan f' , g' wujud, maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Buktikan.

(100/100)

5. (a) Tuliskan polinomial Taylor berdarjah n bagi fungsi $f(x)$ berpusat pada $x_0 = 0$ dan berikan rumus bagi ralatnya.

Dapatkan polinomial Taylor berdarjah 3 bagi

$$f(x) = e^x$$

berpusat pada $x_0 = 0$. Kemudian dapatkan nilai anggaran bagi $e^{0.2}$ dan berikan anggaran ralat.

(b) Dapatkan siri Taylor di sekitar $x = 0$ bagi

$$f(x) = e^x.$$

Tunjukkan bahawa siri ini menumpu di dalam sebarang selang $[\alpha, \beta]$.

- (c) Nilaiikan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Adakah siri ini menumpu?

(100/100)

6. (a) Jika

$$u = \cos(x + ct) + \sin(x - ct)$$

di mana c adalah suatu pemalar, dapatkan $\frac{du}{ds}$ di atas lengkung

$$x = e^s, \quad t = 3s,$$

dalam sebutan melibatkan s sahaja.

- (b) Tunjukkan u di atas (a) memenuhi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

- (c) Jika u, v adalah fungsi x, y yang ditakrifkan secara tersirat oleh persamaan

$$x - u^2 + v^2 = 0$$

$$y - 2uv = 0$$

Cari $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Tunjukkan pula jika $f = f(x, y)$, maka

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{4(u^2 + v^2)} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \right]$$

(100/100)