

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA  
Peperiksaan Semester Tambahan  
Sidang 1987/88

MAT201 - Kalkulus Lanjutan

Tarikh : 24 Jun 1988

Masa : 2.45 petang - 5.45 petang  
(3 jam)

Jawab LIMA soalan sahaja. Semua jawapan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. a) Tentukan sama ada jujukan  $\{a_n\}$  menumpu atau tidak. Jika menumpu cari hadnya

(i)  $a_n = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{1}{2})^n}{n+1}}$

(ii)  $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$

(20/100)

- b) Tentukan sama ada siri berikut menumpu atau mencapah.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n^2 + n^3}$

(ii)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$

(iv)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+3)}{(n+1)^3}$

(60/100)

- c) Cari nilai  $x$  supaya  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n$  menumpu.

(20/100)

2. a) (i) Dengan menggunakan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots \quad -1 < x < 1$$

tunjukkan bahawa

$$\log \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

dan nyatakan selang ketumpuan.

(ii) dengan menggantikan  $x = \frac{1}{2n+1}$  tahkihkan bahawa

$$\log(n+1) = \log n + 2 \left[ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \quad (40/100)$$

b) Nyatakan sama ada siri-siri berikut menumpu secara bersyarat, menumpu mutlak atau mencapah

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4 + 1}$$

(30/100)

$$c) \text{ Jika } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tunjukkan bahawa  $f(x,y)$  tidak selanjar pada  $(0,0)$

(30/100)

3. a) Cari luas daerah yang dikurungi oleh  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ,  $a \neq 0$

(25/100)

b) Nilaikan kamiran berikut.

$$(i) \int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx$$

$$(ii) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^3 dz dy dx$$

(30/100)

c) Dengan menggunakan sistem koordinat sfera cari isipadu bungkah yang terletak di dalam sfera  $\rho = a$  dan di luar kon  $z = r$ .  
(25/100)

d) Bentuk suatu kamiran berganda tiga lengkap dengan had di dalam tertib  $dzdx dy$  yang mewakili isipadu bungkah yang dibatasi oleh permukaan-permukaan  $x = y^2 + z^2$  dan  $x = 1 - y^2$ .  
(20/100)

4. a) Cari pembezaan seluruh,  $dz$  jika  $z = x^2 + 3xy - 2y^2$  dan anggarkan perubahan  $z$  jika nilai  $x$  berubah dari 3 ke 3.2 dan nilai  $y$  berubah dari 5 ke 4.9.  
(25/100)

b) Cari  $\frac{\partial z}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial z}{\partial y}$  sebagai fungsi  $x, y$  dan  $z$  dengan andaikan  $z = f(x,y)$  memenuhi persamaan  $xe^{xy} + ye^{zx} + ze^{xy} = 3$ .  
(30/100)

c) Diberi  $u^2 - v - 3x - y = 0$  dan  $u - 2v^2 - x + 2y = 0$ .  
Cari  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ .  $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, v)}$   
(15/100)

d) Cari maksimum dan minimum fungsi  $f(x,y) = xy$  dengan kekangan  $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2 = 36$ .  
(30/100)

5. a) Nilaikan kamiran

$$\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

jika  $\Omega$  satu dari 'loop' lemniscate  $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$

(20/100)

b) Cari isipadu bungkah yang dibatasi disebelah atas oleh sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$  dan disebelah bawah oleh paraboloid  $az = x^2 + y^2, a \neq 0$ .

(40/100)

c) Tukarkan tertib kamiran dan nilaikan

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx dy$$

(20/100)

d) Katakan  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Cari kembangan Maclaurin untuk  $f(x)$  jika wujud.

(20/100)

6. a) Diberi  $z = xy^2 - y \sin x$ , cari

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}$$

(30/100)

b) Katakan

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin 6r}{6r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0. \end{cases}$$

cari (i)  $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, 0)$

(ii)  $f_r(0, 0)$

(iii)  $f_\theta(r, \theta) \quad r \neq 0.$

(30/100)

c) Suatu fungsi ditakrifkan oleh siri kuasa.

$$y = 1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \dots + \frac{1.4.7 \dots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n} + \dots$$

(i) cari selang ketumpuan siri ini

(ii) tunjukkan bahawa wujud pemalar  $a$  &  $b$  dengan fungsi ini memenuhi persamaan

$$y'' = x^a y + b.$$

(40/100)