

Tarikh: 17 April 1987

Masa: 2.45 ptg - 5.45 ptg

( 3 Jam )

Jawab EMPAT soalan; semua soalan mesti dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Katakan

$$f(x, y) = \begin{cases} y \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right), & \text{jika } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jika } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Cari  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ ,  $f_{xy}(0, 0)$  dan  $f_{yx}(0, 0)$ .

(20/100)

(b) Katakan

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}, \quad x^2 y^2 + (x-y)^2 \neq 0.$$

Tunjukkan bahawa

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)),$$

tetapi

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

tidak wujud.

(20/100)

(c) Diberi

$$z = u(x, y)e^{ax+by} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Cari nilai a dan b supaya

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

(20/100)

(d) Diberi

$$x + y - u + v - w = 1 ,$$

$$x^2 + y^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 4 ,$$

$$x - y + w = 0 .$$

Cari

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \text{ dan } \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)_u .$$

(20/100)

(e) Jika  $x = f(u,v)$  dan  $y = g(u,v)$  di mana  $u = \phi(r,s)$  dan  $v = \psi(r,s)$ , buktikan bahawa

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} .$$

(20/100)

2. (a) Tunjukkan bahawa

$$U = F(x + ct) + G(x - ct)$$

memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

(20/100)

(b) Tunjukkan bahawa penukaran pembolehubah

$$r = x + ct, s = x - ct$$

mentransformasikan persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

kepada persamaan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0 .$$

(20/100)

(c) Cari maksimum dan minimum bagi fungsi

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$$

pada bulatan  $x^2 + y^2 = 1$  dengan menggunakan setiap kaedah yang berikut:

- (i) Kaedah Penghapusan,
- (ii) Kaedah Pembezaan Tersirat,
- (iii) Kaedah Pendaraban Lagrange.

(60/100)

3. (a) Nilaikan kamilan-kamilan berikut:

(i)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ ; di mana D adalah

suatu segitiga berbucu pada (1,0), (5,0), (5,1).

(ii)  $\int_1^2 \int_0^x e^{x^2} dy dx$  .

(30/100)

(b) Suatu kamilan berganda dua

$$\iint_S f(x,y) dx dy$$

bagi fungsi positif  $f(x, y)$  telah diperturunkan kepada suatu kamilan berlelar

$$\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y) dx dy .$$

- (i) Lakarkan daerah pengkamilan S.
- (ii) Tukarkan ter tib pengkamilan.

(25/100)

.../4

(c) Dengan menggunakan penggantian pembolehubah

$$u = y - x, \quad v = y + x,$$

carilah nilai kamilan

$$\iint_S e^{(y-x)/(y+x)} dx dy$$

di mana S adalah suatu segitiga yang dibatasi oleh garis  $x + y = 2$ , paksi-x dan paksi-y.

(25/100)

(d) Cari momen inersia di sekitar paksi-x untuk daerah dalam  $\mathbb{R}^3$  yang dibatasi oleh satah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

dan satah-satah koordinat  $x = 0, y = 0, z = 0$ .  
Ketumpatannya ialah  $f(x,y,z) = \rho$  (pemalar).

(20/100)

4. (a) Cari nilai siri

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(9n-1)(9n+8)}$  ,

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$  .

(20/100)

(b) Katakan

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} .$$

Tunjukkan bahawa

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  ,

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  mencapah.

(20/100)

(MAT201)

(c) Ujikan ketumpuan siri-siri berikut:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{2n}}{(2n-1)!} ,$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} .$$

(30/100)

(d) Tunjukkan bahawa jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

menumpu, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{dan} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

juga menumpu, dan

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) .$$

(30/100)

5. (a) Cari jejari dan selang ketumpuan siri kuasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n} .$$

(10/100)

(b) Cari siri (Maclaurin) bagi fungsi

$$f(x) = \arctan x .$$

(20/100)

(c) Tunjukkan bahawa

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$$

menumpu secara bersyarat.

(20/100)

(d) Tunjukkan bahwa

$$\int_0^{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin nx}{e^n} \right) dx = \frac{2e}{e^2 - 1} .$$

(20/100)

(e) Ujikan ketumpuan kamilan-kamilan berikut:

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{x}{3x^4 + 5x^2 - 1} dx ,$$

$$(ii) \int_0^3 \frac{x^2}{(3 - x)^2} dx ,$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} dx .$$

(30/100)