UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

MAT114 - Aljabar Linear

Tarikh: 26 Oktober 1988 Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari (3 jam)

Jawab LIMA (5) soalan.

1. (a) Diberi matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Cari suatu matriks tak singular P supaya PA adalah suatu matriks bentuk eselon baris terturun.

(ii) Cari ruang penyelesaian bagi sistem persamaan $AX = \underset{\sim}{0}$.

(iii) Dapatkan asas bagi ruang penyelesaian tersebut.

(iv) Nyatakan dimensi ruang penyelesaian ini.

(60/100)

(b) Jika A adalah suatu matriks segiempat sama dan $A^4 = \underset{\sim}{0}$, tunjukkan bahawa

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

(20/100)

(c) Jika A sebarang matriks terpepenjurukan, tunjukkan bahawa A^T juga terpepenjurukan.

(20/100)

.../2

2. (a) Tentukan sama ada set S, adalah subruang dari $\mathbb{R}^3$

(i) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \right\}$.

(ii) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \; x_2 x_3 = 0 \;, \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

(30/100)

(b) Katakan W_1 dan W_2 adalah subruang dari suatu ruang vektor V dan $W_1 + W_2$ ditakrifkan sebagai

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}.$$

(i) Tunjukkan $W_1 + W_2$ adalah suatu subruang dari V.

(ii) Jika V adalah ruang vektor bagi semua matriks 2x2, dan subruang

$$W_1 = \left\{ w \mid w = \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}, \; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ w \mid w = \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}, \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

Cari $\dim(W_1)$, $\dim(W_2)$, $\dim(W_1 + W_2)$ dan $\dim(W_1 \cap W_2)$.

(50/100)

(c) Jika $\lambda = 0$ adalah suatu nilai eigen bagi matriks A, tunjukkan bahawa A adalah singular.

(20/100)

3. (a) Buktikan secara aruhan bahawa untuk semua nilai integer positif n, $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ terbahagi oleh $(x + y)$.

(25/100)

.../3

(b) Diberi $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(i) cari A^{-1}.

(ii) tuliskan A sebagai hasil darab beberapa matriks baris permulaan.

(iii) cari penentu A.

(iv) adj A.

(v) tulis adj(adj A) di dalam sebutan $|A|$ dan A.

(50/100)

(c) Tentukan sama ada set S

$$S = \{-1 + x + 3x^2 \ , \ 6 - 5x + 2x^2 \ , \ 8 - 4x + x^2\}$$

merentang P_2, di mana P_2 adalah set semua polinomial dalam x yang berdarjah kurang atau sama dengan 2.

(25/100)

4. (a) Diberi $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(i) Cari nilai-nilai eigen bagi A.

(ii) Cari matriks tak singular P dan matriks pepenjuru D supaya $P^{-1} A P = D$.

(iii) Apakah nilai-nilai eigen bagi matriks $A^5 - 5I$? Tunjukkan cara anda memperolehi jawapan tersebut.

(60/100)

(b) (i) Tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-n \end{vmatrix} = -n^3(4 - n)$$

(ii) Tanpa mengembangkan penentu, tunjukkan bahawa

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 t & a_2 + b_2 t & a_3 + b_3 t \\ a_1 t + b_1 & a_2 t + b_2 & a_3 t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(40/100)

5\. (a) Apakah nilai a, b, c supaya sistem berikut

$$\begin{aligned} ax + by - 3z &= -3 \\ -2x - by + cz &= -1 \\ ax + 3y - cz &= -3 \end{aligned}$$

mempunyai penyelesaian $x = 1$, $y = -1$ dan $z = 2$?

(40/100)

(b) Jika a, b, c, d adalah integer dengan $a + b = c + d$, tunjukkan bahawa nilai-nilai eigen bagi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ialah $\lambda_1 = a + b$, $\lambda_2 = a - c$.

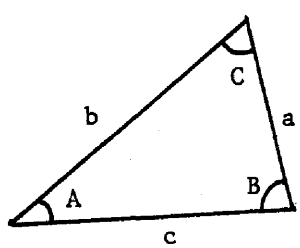
(30/100)

(c) Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

cari dua matriks baris permulaan Q_1 dan Q_2 supaya $Q_1 Q_2 A = B$ dan dapatkan hubungan di antara $|A|$ dan $|B|$.

(30/100)

6\. (a)



Bagi sebarang segitiga ABC

$$\begin{aligned} c \cos B + b \cos C &= a \\ c \cos A + a \cos C &= b \\ a \cos B + b \cos A &= c \end{aligned}$$

Dengan menganggap ini sebagai satu sistem persamaan dan dengan menggunakan petua Crammer, tunjukkan bahawa

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(33/100)

(b) Cari suatu subset dari set S yang boleh dijadikan asas bagi ruang yang direntangi oleh S.

$$S = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \; V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; V_5 = \begin{pmatrix} -7 \\ 18 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$$

(33/100)

(c) Jika $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $A = B^{-1}$.

Dapatkan pemasukan a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{33} bagi A.

* menandakan sebarang nilai nombor nyata.

(34/100)

- oooOOooo -