UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1993/94

Jun 1994

MAT114 - Aljabar Linear

Masa: [3 jam]

Jawab **SEMUA** soalan.

1. Andaikan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 16 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 13 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

(a) Dapatkan matriks permulaan E_1 supaya $E_1 A = B$.

(10/100)

(b) Dapatkan matriks-matriks permulaan E_2 dan E_3 supaya $E_3 E_2 A = C$.

(20/100)

(c) Dapatkan $(E_1)^5$, $(E_2)^5$, $(E_3)^5$.

(15/100)

(d) Dapatkan $(E_1)^{-1}$, $(E_2)^{-1}$, $(E_3)^{-1}$.

(15/100)

(e) (i) Tunjukkan bahawa

$$E_1^3(-4) \ E_3^2(-4) \ E_1^2(3) \ E_3^1(-1) \ E_2^1(2)A = I \quad ,$$

dengan I sebagai matriks identiti 3 x 3.

(ii) Seterusnya, tulis A dan A^{-1} sebagai hasil darab matriks permulaan.

(iii) Dapatkan A^{-1}.

(40/100)

...2/-

2. (a) Nilaikan

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$,

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{vmatrix}$.

(30/100)

(b) Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 4 & 5 \\ x^2 & 16 & 25 \end{pmatrix}$,

dapatkan nilai-nilai x supaya A merupakan matriks singular.

(20/100)

(c) Tentukan nilai-nilai nyata k supaya sistem persamaan

$$\begin{aligned} x + 2y \;\; + kz &= 3 \\ 2x + k^2y + \; 3z &= -k + 8 \\ x - ky \;\; + 2z &= k^4 \end{aligned}$$

(i) mempunyai penyelesaian unik,
(ii) mempunyai penyelesaian tak terhingga banyaknya,
(iii) tak konsisten.

(30/100)

(d) Andaikan

$$A \xrightarrow{R_j^i} E_j^i A \ ,$$

$$A \xrightarrow{R_i(\alpha)} E_i(\alpha) A \ ,$$

$$A \xrightarrow{R_j^i(\alpha)} E_j^i(\alpha) A \ ,$$

dengan $|A| = 3$.

Nilaikan:

$$\left| E_2^1 \, E_3^1 \, (-4) \, E_2(5) A \right| \ .$$

(20/100)

...3/-

3. (a) Jika A dan B merupakan matriks tak singular dan kalis tukar tertib, buktikan bahawa pasangan A^{-1} dan B^{-1} juga kalis tukar tertib.

(20/100)

(b) Andaikan $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(i) dapatkan b.e.b.t. A. Seterusnya, tentukan sama ada A merupakan matriks singular atau tidak,
(ii) nyatakan nilai $|A|$,
(iii) dapatkan A adj A,
(iv) nyatakan pangkat A,
(v) selesaikan sistem persamaan

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 15 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 7\,. \end{array}$$

(60/100)

(c) Dapatkan suatu asas M_{2x2}, set semua matriks berperingkat 2x2 dengan pemasukan nyata, yang mengandungi matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(20/100)

4. (a) Tentukan sama ada setiap set berikut merupakan subruang $\mathbb{R}^3$. Nyatakan sebab-sebabnya.

(i) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(ii) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x^2 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$,

(iii) $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x + 3y - 5z = 0\,, \\ x, y, z \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$.

(30/100)

..4/-

(b) Andaikan

$$S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

(i) Bolehkan setiap $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ditulis sebagai gabungan linear vektor dalam S?

(ii) Adakah S merentang $\mathbb{R}^3$?

(iii) Tentukan sama ada S bersandar secara linear atau tidak.

(iv) Adakah S suatu asas $\mathbb{R}^3$?

(v) Jika $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, cari suatu asas subruang $W \subset \mathbb{R}^3$ dengan $W = \left\{ \underset{\sim}{y} : A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{0} \ , \ \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

(70/100)

5. (a) Andaikan

$$A = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} .$$

(i) Dapatkan polinomial cirian matriks A.
(ii) Nyatakan semua nilai eigen dan vektor eigen sepadanan untuk matriks A.
(iii) Adakah A terpepenjurukan?
Jika ya, dapatkan P, matriks tak singular dan D, matriks pepenjuru supaya $P^{-1}AP = D$. Jika tidak, nyatakan sebabnya.

(65/100)

(b) Andaikan $\underset{\sim}{x}$ sebagai vektor eigen matriks A sepadanan dengan nilai eigen λ. Buktikan bahawa λ^n adalah nilai eigen A^n dengan $\underset{\sim}{x}$ sebagai vektor eigen sepadanan, untuk semua integer positif n.

(35/100)

- ooo0Oooo -