UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Tambahan
Sidang 1987/88

MAT 114 - Aljabar Linear

Tarikh : 23 Jun 1988 Masa : 2.15 petang - 5.15 petang
(3 jam)

Jawab mana-mana LIMA soalan.

1. (a) Katakan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks 2 x 2 yang ditakrifkan dengan

$a_{ij} = 2i + 3j$ dan $b_{ij} = 4i + 5j$

bagi $1 \leqslant i \leqslant 2$ dan $1 \leqslant j \leqslant 2$.

Carilah

(i) $A - 2B$

(ii) $(A + 3B)^T$

(iii) AB

(iv) $|A|$

(v) A^{-1}

(iv) adj A

(30/100)

(b) Buktikan bahawa

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

bagi semua integer positif n.

(20/100)

(c) Katakan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah suatu matriks 2 x 2. Jika $AB = BA$ bagi semua matriks B, buktikan bahawa $a = d$ dan $b = c = 0$.

(20/100)

(d) Katakan A, B dan C adalah matriks n x n.

Buktikan bahawa

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $A(BC) = (AB)C$

(30/100)

2. (a) Carilah syarat-syarat yang mesti dipenuhi oleh a,b,c supaya sistem persamaan berikut:

$$(1+a)x + by + cz = 1$$
$$ax + (1+b)y + cz = 0$$
$$ax + by + (1+c)z = 0$$

(i) mempunyai penyelesaian unik

(ii) mempunyai penyelesaian yang tak terhingga banyaknya

(iii) tak konsisten.

(40/100)

(b) Dengan menggunakan petua Cramer, selesaikan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 7 \\ 2x + 3y + 4z &= 8 \\ x + 4y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

(30/100)

(c) Selesaikan sistem homogen berikut:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(30/100)

3. (a) Katakan A dan B adalah matriks n x n. Buktikan atau sangkalkan setiap pernyataan berikut:

   (i) Jika $AB = \tilde{0}$, maka $BA = \tilde{0}$.

   (ii) Jika A dan B simetri, maka A + B simetri.

   (iii) Jika A dan B tak singular, maka A + B tak seingular.

   (iv) Jika A simetri dan tak singular, maka A^{-1} simetri.

   (v) Jika A^2 tak singular, maka A tak singular.

(50/100)

(b) Jika E_1 dan E_2 adalah matriks permulaan baris, buktikan bahawa $|E_1 E_2| = |E_1||E_2|$.

(30/100)

(c) Katakan $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_3 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Carilah matriks P_1 dan P_2 sedemikain hingga: $P_1 M_1 = M_2$, $P_2 M_1 = M_3$.

(20/100)

4. (a) Katakan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

Carilah (i) $|A|$

(ii) adj A

(iii) $|\text{adj}(5A)|$

(iv) $A^2 \text{ adj}(2A^2)$

(v) A^{-1}

(vi) $|5A^{-1}|$.

(60/100)

(b) Nilaikan penentu

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a & a \\ a & a+b & a & a & a \\ a & a & a+b & a & a \\ a & a & a & a+b & a \\ a & a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

(20/100)

(c) Carilah matriks A yang memenuhi

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(20/100)

5. (a) Carilah semua nilai eigen dan suatu asas bagi setiap ruang eigen untuk matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(30/100)

(b) Buktikan bahawa jika $\{u,v,w\}$ adalah suatu asas bagi ruang vektor V maka $\{u+v,\ v+w,\ w+u\}$ adalah asas bagi V.

(30/100)

(c) Katakan A, B matriks n x n. Buktikan atau sangkalkan bahawa

(i) Jika λ_1 adalah suatu nilai eigen bagi A dan λ_2 adalah suatu nilai eigen bagi B, maka $\lambda_1\lambda_2$ adalah suatu nilai eigen bagi AB.

(ii) Jika λ adalah suatu nilai eigen bagi AB, maka λ adalah suatu nilai eigen bagi BA.

(40/100)

6. (a) Tunjukkan bahawa matriks $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ tidak terpepenjurukan.

(30/100)

(b) Buktikan bahawa vektor-vektor eigen yang bukan vektor sifar yang bersepadan dengan nilai-nilai eigen yang berlainan adalah tak bersandar linear.

(30/100)

(c) Katakan $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

Carilah :

(i) $A^T A$.

(ii) nilai eigen bagi $A^T A$.

(iii) nilai eigen bagi $(A^T A)^n$, di mana n adalah integer positif.

(40/100)

- oo0oo -